# 欧拉函数

### 定义

$1\sim N$ 中与 $N$ 互质的数的个数叫欧拉函数, 记为 $\varphi(N)$

对 $N$ 分解质因数 $N=p_1^{c_1}\times p_2^{c_2}\times\cdots\times p_k^{c_k}$

特别地, $\varphi(1)=1$

### 性质

1. $\varphi(N)=N\times(1-\frac{1}{p_1})\times(1-\frac{1}{p_2})\times\cdots\times(1-\frac{1}{p_k})$
2. 若有 $p\ |\ N$, 且满足 $p^2\ |\ N$, 则 $\varphi(N)=\varphi(N/p)*p$
3. 若有 $p\ |\ N$, 且一定不满足 $p^2\ |\ N$, 则 $\varphi(N)=\varphi(N/p)*(p-1)$
4. $\forall N>1, 1\sim N$ 中与 $N$ 互质的数的和为 $N*\varphi(N)/2$
5. 当 $a,b$ 互质时, 有 $\varphi(a*b)=\varphi(a)*\varphi(b)$
6. 对 $N$ 分解质因数 $N=p_1^{c_1}\times p_2^{c_2}\times\cdots\times p_k^{c_k}$, 则有 $\varphi(N)=\prod_{i=1}^{k}\varphi(p_i^{c_i})$
7. $\varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}$
8. $\sum_{d|n}\varphi(d)=n$
9. 若正整数 $a, n$ 互质, 则有 $a^{\varphi(n)}\equiv1\pmod{n}$
10. 若正整数 $a, n$ 互质, 则对于任意正整数 $b$, 有 $a^b\equiv a^{b\ mod\ \varphi(n)}\pmod{n}$
11. $a, n\in N$, 则$a^b\equiv \left\{\begin{array}{rl}a^b\pmod{n}&,b<\varphi(n),\\a^{b\ mod\ \varphi(n)+\varphi(n)}\pmod{n}&,b\ge\varphi(n). \end{array} \right.$
12. 若 $gcd(m,n)=d$, 则 $\varphi(mn)=d\varphi(m)\varphi(n)/\varphi(d)$
13. 若 $m\ |\ n$, 则 $\varphi(mn)=m\varphi(n)$
14. 若 $m\ |\ n$, 则 $\varphi(m)|\varphi(n)$
15. $\varphi(n)=\sum_{d|n}d\cdot\mu(\frac n d)$

### 参考资料

%%//%%blog.csdn.net/niiick/article/details/81347041

%%//%%www.cnblogs.com/BlueHeart0621/p/11706153.html