

数理知识总结

组合意义

从排成一排的 n 个球里选出 r 个球互不相邻的方案种数是 $c(n-r+1, r)$ □

从围成一圈的 n 个球里选出 r 个球互不相邻的方案种数是 $c(n-r, r) \times \frac{n}{n-r}$ □

(第二个结论相当于分类讨论选不选一号球(自己规定的)然后转化成两个第一个结论的问题)

$\sum_{i=0}^n i \times c(n, i) = n2^{n-1}$ □把组合数都提出来个 n □然后二项式定理显然。

同理, 有 $\sum_{i=0}^n i^2 \times c(n, i) = n(n+1)2^{n-2}$

$\sum_{i=0}^n c(i, k) = c(n+1, k+1)$

$c(n, r)c(r, k) = c(n, k)c(n-k, r-k)$ □通过组合意义证明。

斐波那契数列

$\sum_{i=0}^n c(n-i, i) = F(n+1)$ □其中 $F(n)$ 表示斐波那契数列的第 n 项, $F(0)=F(1)=1$ □数学归纳法加组合数公式可证。

斐波那契通项公式 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$

斐波那契二倍项和一倍相邻项有关

$F_{2k} = F_k(2F_{k+1} - F_k)$ □这里的是 $F_1 = F_2 = 1$ 的。

$F_{2k+1} = F_{k+1}^2 + F_k^2$

这两个式子可以用数学归纳法(螺旋)一直证上去就结束了。

斐波那契数列中间项平方和相邻项乘积有关

$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ 设 $T(n) = F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2$ □ $T(2) = 1$ □且 $T(n+1) = -T(n)$ 可证, 所以原式成立

$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n$ 数学归纳法照证不误(拆项)。

令 $k=n$ □我们得到 $F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$ □所以 $F_{2n} = (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$

$(F_m, F_n) = F_{(m, n)}$

卢卡斯数列 □ $L_0 = 2, L_1 = 1, L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ □前几项为 $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots$

卢卡斯数列通项公式 $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$

事实上，我们有
$$\left(\frac{L_n + F_n \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

又有
$$L_n^2 - 5F_n^2 = (-4)^n$$

$$2L_{m+n} = 5F_m F_n + L_m L_n$$
$$2F_{m+n} = F_m L_n + L_m F_n$$
$$L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n$$
$$F_{2n} = F_n L_n$$

考虑模 p 意义下的斐波那契数列，有一个结论是，周期不会超过 $6p$ 且只有在满足 $p=2 \times 5^k$ 的形式时才取等号。

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:%E7%8E%8B%E6%99%BA%E5%BD%AA:%E6%95%B0%E7%90%86%E7%9F%A5%E8%AF%86&rev=1628353354

Last update: 2021/08/08 00:22