数理知识总结

组合数

从排成一排的 n 个球里选出 r 个球互不相邻的方案种数是 $c(n-r+1,r)$ ，

从围成一圈的 n 个球里选出 r 个球互不相邻的方案种数是 $c(n-r,r)×{\frac n {(n-r)}}$ ，

（第二个结论相当于分类讨论选不选一号球（自己规定的）然后转化成两个第一个结论的问题）

$\sum_{i=0}^{n} i×c(n,i)=n2^{n-1}$ ，把组合数都提出来个 n ，然后二项式定理显然。

同理，有 $\sum_{i=0}^{n} i^{2}×c(n,i)=n(n+1)2^{n-2}$

$\sum_{i=0}^{n} c(l,k)=c(n+1,k+1)$

$c(n,r)c(r,k)=c(n,k)c(n-k,r-k)$ ，通过组合意义证明。

斐波那契数列

$\sum_{i=0}^{n} c(n-i,i)=F(n+1)$ ，其中 $F(n)$ 表示斐波那契数列的第 n 项， $F(0)=F(1)=1$ ，数学归纳法加组合数公式可证。

斐波那契通项公式 $F_{n}={\frac {({\frac {1+\sqrt{5}} 2})^{n}-({\frac {1-\sqrt{5}} 2})^{n}} {\sqrt{5}}}$

斐波那契二倍项和一倍相邻项有关

$F_{2k}=F_{k}(2F_{k+1}-F_{k})$ ，这里的是 $F_{1}=F_{2}=1$ 的。

$F_{2k+1}={F_{k+1}}^{2}+{F_{k}}^{2}$

这两个式子可以用数学归纳法（螺旋）一直证上去就结束了。

斐波那契数列中间项平方和相邻项乘积有关

$F_{n-1}F_{n+1}-{F_{n}}^{2}=(-1)^{2}$ 设 $T(n)=F_{n-1}F_{n+1}-{F_{n}}^{2}$ ， $T(2)=1$ ，且 $T(n+1)=-T(n)$ 可证，所以原式成立

$F_{n+k}=F_{k}F_{n+1}+F_{k-1}F_{n}$ 数学归纳法照证不误（拆项）。

令 $k=n$ ，我们得到 $F_{2n}=F_{n}(F_{n+1}+F_{n-1})$ ，所以 $F_{2n}=(F_{n+1}-F_{n-1})(F_{n+1}+F_{n-1})=F_{n+1}^{2}-F{n-1}^{2}$

$(F_{m},F_{n})=F_{(m,n)}$

卢卡斯数列， $L_{0}=2,L_{1}=1,L_{n}=L_{n-1}+L_{n-2}$ ，前几项为 $2,1,3,4,7,11,18\cdots$

卢卡斯数列通项公式 $L_{n}={({\frac {1+\sqrt{5}} 2})^{n}+({\frac {1-\sqrt{5}} 2})^{n}}$

事实上，我们有□ ${\frac {L_{n}+F_{n}\sqrt{5}} 2}=({\frac {1+\sqrt{5}} 2})^{n}$

又有 ${L_{n}}^{2}-5{F_{n}}^{2}=(-4)^{n}$

$2L_{m+n}=5F_{m}F_{n}+L_{m}L_{n}$

$2F_{m+n}=F_{m}L_{n}+L_{m}F_{n}$

$L_{2n}=L_{n}^{2}-2(-1)^{n}$

$F_{2n}=F_{n}L_{n}$

考虑模 p 意义下的斐波那契数列，有一个结论是，周期不会超过 $6p$ □且只有在满足 $p=2×5^{k}$ 的形式时才取等号。