

数理知识总结

组合数

从排成一排的 n 个球里选出 r 个球互不相邻的方案种数是 $c(n-r+1, r)$ □

从围成一圈的 n 个球里选出 r 个球互不相邻的方案种数是 $c(n-r, r) \times \frac{n}{n-r}$ □

(第二个结论相当于分类讨论选不选一号球(自己规定的)然后转化成两个第一个结论的问题)

$\sum_{i=0}^n i \times c(n, i) = n2^{n-1}$ □把组合数都提出来个 n □然后二项式定理显然。

同理, 有 $\sum_{i=0}^n i^2 \times c(n, i) = n(n+1)2^{n-2}$

$\sum_{i=0}^n c(i, k) = c(n+1, k+1)$

$c(n, r)c(r, k) = c(n, k)c(n-k, r-k)$ □通过组合意义证明。

上指标反转(其实在我这里变成了下指标反转) $c(r, k) = (-1)^k c(k-r-1, k)$, k 是整数, 对于任意的整数 n 都成立!!! 所以对于“下指标”和 (-1) 同时出现的, 要提高警惕。

比如现在有 $(-1)^m c(-n-1, m) = (-1)^n c(-m-1, n)$ □整数 $m, n \geq 0$ □因为两边都等于 $c(m+n, m)$

又比如 $\sum_{k \leq m} c(r, k)(-1)^k = c(r, 0) - c(r, 1) + \dots + (-1)^m c(r, m) = \sum_{k \leq m} c(k-r-1, k) = c(m-r, m) = (-1)^m c(r-1, m)$

有意思的关系式 $\sum_{k \leq m} c(m+r, k)x^k y^{m-k} = \sum_{k \leq m} c(-r, k)(-x)^k (x+y)^{m-k}$, m 为整数, 用数学归纳法可以证明, 此处省略。

令 $x = -1$ 并令 $y = 1$ □则有 $\sum_{k \leq m} c(m+r, k)(-1)^k = c(-r, m)$

令 $x = 1$ 并令 $y = 1, r = m+1$ □则有 $\sum_{k \leq m} c(2m+1, k) = \sum_{k \leq m} c(m+k, k)2^{m-k}$

斐波那契数列

$\sum_{i=0}^n c(n-i, i) = F(n+1)$ □其中 $F(n)$ 表示斐波那契数列的第 n 项, $F(0) = F(1) = 1$ □数学归纳法加组合数公式可证。

斐波那契通项公式 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$

斐波那契二倍项和一倍相邻项有关

$F_{2k} = F_k(2F_{k+1} - F_k)$ □这里的是 $F_1 = F_2 = 1$ 的。

$F_{2k+1} = F_{k+1}^2 + F_k^2$

这两个式子可以用数学归纳法(螺旋)一直证上去就结束了。

斐波那契数列中间项平方和相邻项乘积有关

$F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=(-1)^2$ 设 $T(n)=F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2$ $T(2)=1$ 且 $T(n+1)=-T(n)$ 可证，所以原式成立

$F_{n+k}=F_kF_{n+1}+F_{k-1}F_n$ 数学归纳法照证不误（拆项）。

令 $k=n$ 我们得到 $F_{2n}=F_n(F_{n+1}+F_{n-1})$ 所以 $F_{2n}=(F_{n+1}-F_{n-1})(F_{n+1}+F_{n-1})=F_{n+1}^2-F_{n-1}^2$

$(F_m, F_n)=F_{(m,n)}$

卢卡斯数列 $L_0=2, L_1=1, L_n=L_{n-1}+L_{n-2}$ 前几项为 $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots$

卢卡斯数列通项公式 $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

事实上，我们有 $\frac{L_n + F_n}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

又有 $L_n^2 - 5F_n^2 = (-4)^n$

$2L_{m+n} = 5F_mF_n + L_mL_n$

$2F_{m+n} = F_mL_n + L_mF_n$

$L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n$

$F_{2n} = F_nL_n$

考虑模 p 意义下的斐波那契数列，有一个结论是，周期不会超过 $6p$ 且只有在满足 $p=2 \times 5^k$ 的形式时才取等号。

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:%E7%8E%8B%E6%99%BA%E5%BD%AA:%E6%95%B0%E7%90%86%E7%9F%A5%E8%AF%86&rev=1628414606

Last update: 2021/08/08 17:23