2025/11/28 06:58 1/2 数理知识总结

## 数理知识总结

## 组合数

从排成一排的 \$n\$ 个球里选出 \$r\$ 个球互不相邻的方案种数是 \$c(n-r+1,r)\$ □

从围成一圈的 \$n\$ 个球里选出 \$r\$ 个球互不相邻的方案种数是 \$c(n-r,r)×{\frac n {(n-r)}}\$ □

(第二个结论相当于分类讨论选不选一号球(自己规定的)然后转化成两个第一个结论的问题)

\$\sum {i=0}^{n} i×c(n,i)=n2^{n-1}\$ □把组合数都提出来个 \$n\$ □然后二项式定理显然。

同理,有 \$\sum {i=0}^{n} i^{2} xc(n,i)=n(n+1)2^{n-2}\$

 $\sum_{i=0}^{n} c(i,k) = c(n+1,k+1)$ 

\$c(n,r)c(r,k)=c(n,k)c(n-k,r-k)\$ □通过组合意义证明。

上指标反转 ( 其实在我这里变成了下指标反转 $\square$  \$c(r,k)=(-1)^{k}c(k-r-1,k),k\$ 是整数,对于任意的整数 \$n\$ 都成立!!!所以对于"下指标"和\$(-1)\$ 同时出现的,要提高警惕。

比如现在有 \$(-1)^{m}c(-n-1,m)=(-1)^{n}c(-m-1,n)\$ □整数 \$m,n≥0\$ □因为两边都等于 \$c(m+n,m)\$

又比如  $s\sum_{k\leq m}c(r,k)(-1)^{k}=c(r,0)-c(r,1)+\dots+(-1)^{m}c(r,m)=\sum_{k\leq m}c(k-r-1,k)=c(m-r,m)=(-1)^{m}c(r-1,m)$ 

有意思的关系式[]  $s=\sum_{k\leq m}c(m+r,k)x^{k}y^{m-k}=\sum_{k\leq m}c(-r,k)(-x)^{k}(x+y)^{m-k},m$ \$ 为整数,用数学归纳法可以证明,此处省略。

令 \$x=-1\$ 并令 \$y=1\$ □则有 \$\sum\_{k≤m}c(m+r,k)(-1)^{k}=c(-r,m)\$

令 \$x=1\$ 并令 \$y=1,r=m+1\$ □则有 \$\sum\_{k≤m}c(2m+1,k)=\sum\_{k≤m}c(m+k,k)2^{m-k}\$

\$\sum\_{k}c(l,m+k)c(s+k,n)(-1)^{k}=(-1)^{l+m}c(s-m,n-l)\$ □整数 \$l≥0,m,n\$ 为整数,数学归纳法, 先拆后合可证,这里省略。

\$\sum\_{k≤I}c(I-k,m)c(s,k-n)(-1)^{k}=(-1)^{I+m}c(s-m-1,I-m-n),\$ 整数 \$I,m,n≥0\$

\$\sum\_{-q≤k≤l}c(l-k,m)c(q+k,m)=c(l+q+1,m+n+1)\$ □整数 \$m,n≥0,\$ 整数 \$l+q≥0\$

## 斐波那契数列

\$\sum\_{i=0}^{n} c(n-i,i)=F(n+1)\$ □其中 \$F(n)\$ 表示斐波那契数列的第 \$n\$ 项 , \$F(0)=F(1)=1\$ □数 学归纳法加组合数公式可证。

斐波那契通项公式 \$F\_{n}={\frac {({\frac {1+\sqrt{5}} 2})^{n}-({\frac {1-\sqrt{5}} 2})^{n}} {\sqrt{5}}}\$

update: 2020-2021:teams:legal\_string: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\_string:%E7%8E%8B%E6%99%BA%E5%BD%AA:%E6%95%B0%E7%90%86%E7%9F%A5%E8%AF%86&rev=1628424296

## 斐波那契二倍项和一倍相邻项有关

\$F {2k}=F\_{k}(2F\_{k+1}-F\_{k})\$ [这里的是 \$F\_{1}=F\_{2}=1\$ 的。

 $F {2k+1}={F {k+1}}^{2}+{F {k}}^{2}$ \$

这两个式子可以用数学归纳法(螺旋)一直证上去就结束了。

斐波那契数列中间项平方和相邻项乘积有关

\$F {n-1}F {n+1}-{F {n}}^{2}=(-1)^{2}\$ 设\$T(n)=F {n-1}F {n+1}-{F {n}}^{2}\$ □\$T(2)=1\$□ 且 \$T(n+1)=-T(n)\$ 可证,所以原式成立

\$F {n+k}=F {k}F {n+1}+F {k-1}F {n}\$ 数学归纳法照证不误(拆项)。

 $F \{n-1\}\)(F \{n+1\}+F \{n-1\})=F \{n+1\}^{2}-F\{n-1\}^{2}$ \$

 $(F \{m\},F \{n\})=F \{(m,n)\}$ \$

卢卡斯数列□ \$L {0}=2,L {1}=1,L {n}=L {n-1}+L {n-2}\$□前几项为\$2,1,3,4,7,11,18...\$

卢卡斯数列通项公式 \$L {n}={({\frac {1+\sqrt{5}} 2})^{n}+({\frac {1-\sqrt{5}} 2})^{n}}

事实上,我们有[]\${\frac {L\_{n}+F\_{n}\sqrt{5}} 2}=({\frac {1+\sqrt{5}} 2})^{n}\$

又有 \${L\_{n}}^{2}-5{F\_{n}}^{2}=(-4)^{n}\$

 $2L_{m+n}=5F_{m}F_{n}+L_{m}L_{n}$ 

 $2F_{m+n}=F_{m}L_{n}+L_{m}F_{n}$ 

 $L {2n}=L {n}^{2}-2(-1)^{n}$ 

 $F_{2n}=F_{n}L_{n}$ 

考虑模 \$p\$ 意义下的斐波那契数列,有一个结论是,周期不会超过 \$6p\$ □且只有在满足 \$p=2×5^{k}\$ 的形式时才取等号。

From: https://wiki.cvbbacm.com/ - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\_string:%E7%8E%8B%E6%99%BA%E5%BD%

Last update: 2021/08/08 20:04



https://wiki.cvbbacm.com/ Printed on 2025/11/28 06:58