

# 数理知识总结

## 组合数

从排成一排的  $n$  个球里选出  $r$  个球互不相邻的方案种数是  $c(n-r+1, r)$  □

从围成一圈的  $n$  个球里选出  $r$  个球互不相邻的方案种数是  $c(n-r, r) \times \frac{n}{n-r}$  □

(第二个结论相当于分类讨论选不选一号球(自己规定的)然后转化成两个第一个结论的问题)

$\sum_{i=0}^n i \times c(n, i) = n2^{n-1}$  □把组合数都提出来个  $n$  □然后二项式定理显然。

同理, 有  $\sum_{i=0}^n i^2 \times c(n, i) = n(n+1)2^{n-2}$

$\sum_{i=0}^n c(i, k) = c(n+1, k+1)$

$c(n, r)c(r, k) = c(n, k)c(n-k, r-k)$  □通过组合意义证明。

上指标反转(其实在我这里变成了下指标反转)  $c(r, k) = (-1)^k c(k-r-1, k)$ ,  $k$  是整数, 对于任意的整数  $n$  都成立!!! 所以对于“下指标”和  $(-1)$  同时出现的, 要提高警惕。

比如现在有  $(-1)^m c(-n-1, m) = (-1)^n c(-m-1, n)$  □整数  $m, n \geq 0$  □因为两边都等于  $c(m+n, m)$

又比如  $\sum_{k \leq m} c(r, k)(-1)^k = c(r, 0) - c(r, 1) + \dots + (-1)^m c(r, m) = \sum_{k \leq m} c(k-r-1, k) = c(m-r, m) = (-1)^m c(r-1, m)$

有意思的关系式  $\sum_{k \leq m} c(m+r, k)x^k y^{m-k} = \sum_{k \leq m} c(-r, k)(-x)^k (x+y)^{m-k}$ ,  $m$  为整数, 用数学归纳法可以证明, 此处省略。

令  $x = -1$  并令  $y = 1$  □则有  $\sum_{k \leq m} c(m+r, k)(-1)^k = c(-r, m)$

令  $x = 1$  并令  $y = 1, r = m+1$  □则有  $\sum_{k \leq m} c(2m+1, k) = \sum_{k \leq m} c(m+k, k)2^{m-k}$

又因为左侧是求了一半的组合数, 所以是  $2^{2m+1-1} = 2^{2m}$  □所以这个式子等价于  $2^m = \sum_{k \leq m} c(m+k, k)2^{-k}$

$\sum_k c(l, m+k)c(s+k, n)(-1)^k = (-1)^{l+m} c(s-m, n-l)$  □整数  $l \geq 0, m, n$  为整数, 数学归纳法, 先拆后合可证, 这里省略。

$\sum_{k \leq l} c(l-k, m)c(s, k-n)(-1)^k = (-1)^{l+m} c(s-m-1, l-m-n)$ , 整数  $l, m, n \geq 0$

$\sum_{-q \leq k \leq l} c(l-k, m)c(q+k, m) = c(l+q+1, m+n+1)$  □整数  $m, n \geq 0$ , 整数  $l+q \geq 0$

## 例题

1. 求  $\frac{\sum_{k=0}^m c(m, k) c(n, k)}{c(n, m)}$  □整数  $n \geq m \geq 0$

我们自然是希望统一分母, 貌似没有选择, 统一成  $c(n, m)$  会好一些, 又因为我们有  $c(n, m)c(m, k) = c(n, k)c(n-k, m-k)$  □所以原式等于  $\frac{\sum_{k=0}^m c(n-k, m-k) c(n, m)}{c(n, m)}$  □分子用  $t = m-k$  换个元, 再带公式, 就知道是  $c(n+1, m)$  和分母分别写成阶乘的形式, 最后结果是

$$\frac{n+1}{n+1-m}$$

## 斐波那契数列

$\sum_{i=0}^n c(n-i,i)=F(n+1)$  其中  $F(n)$  表示斐波那契数列的第  $n$  项,  $F(0)=F(1)=1$  数学归纳法加组合数公式可证。

$$F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$$

斐波那契二倍项和一倍相邻项有关

$$F_{2k} = F_k(2F_{k+1} - F_k)$$
 这里的是  $F_1 = F_2 = 1$  的。

$$F_{2k+1} = F_{k+1}^2 + F_k^2$$

这两个式子可以用数学归纳法(螺旋)一直证上去就结束了。

斐波那契数列中间项平方和相邻项乘积有关

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$
 设  $T(n) = F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2$  且  $T(2) = 1$  且  $T(n+1) = -T(n)$  可证, 所以原式成立

$$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n$$
 数学归纳法照证不误(拆项)。

$$\text{令 } k=n \text{ 我们得到 } F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) \text{ 所以 } F_{2n} = (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$$

$$(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$$

卢卡斯数列  $L_0 = 2, L_1 = 1, L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$  前几项为  $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots$

$$L_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

$$\text{事实上, 我们有 } \frac{L_n + F_n \sqrt{5}}{2} = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$$

$$\text{又有 } L_n^2 - 5F_n^2 = (-4)^n$$

$$2L_{m+n} = 5F_m F_n + L_m L_n$$


$$2F_{m+n} = F_m L_n + L_m F_n$$

$$L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n$$

$$F_{2n} = F_n L_n$$

考虑模  $p$  意义下的斐波那契数列, 有一个结论是, 周期不会超过  $6p$  且只有在满足  $p = 2 \times 5^k$  的形式时才取等号。

From:  
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:  
[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:%E7%8E%8B%E6%99%BA%E5%BD%AA:%E6%95%B0%E7%90%86%E7%9F%A5%E8%AF%86&rev=1628426290](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:%E7%8E%8B%E6%99%BA%E5%BD%AA:%E6%95%B0%E7%90%86%E7%9F%A5%E8%AF%86&rev=1628426290) 

Last update: 2021/08/08 20:38