

数理知识总结

位运算

判断一个数是不是 2^k 的非负整数次幂

```
bool isPowerOfTwo(int n) {
    return n>0&&(n&(n-1))==0;
}
```

对2的非负整数次幂取模

$x \bmod 2^k$ 代表 $x \bmod 2^k$

```
int modPowerOfTwo(int x,int mod) {
    return x&(mod-1);
}
```

取绝对值

在某些机器上效率比 $n>0?n:-n$ 高

```
int Abs(int n) {
    return (n^(n>>31))-(n>>31);
}
long long Abs(long long n) {
    return (n^(n>>63))-(n>>63);
}
```

取两个数的最大/最小值

在某些机器上效率比 $a>b?a:b$ 高 如果 $a \geq b, (a-b) \gg 31$ 为 0 , 否则为 -1

```
int max(int a, int b) { return b & ((a - b) >> 31) | a & (~ (a - b) >> 31); }
int min(int a, int b) { return a & ((a - b) >> 31) | b & (~ (a - b) >> 31); }
```

模拟集合操作

差集是 $a \& (\sim b)$ 对称差是 $a \wedge b$

子集遍历

可以遍历一个数代表的集合中所有非空子集包括自己

这个复杂度为 $O(2^{\text{popcount}(u)})$ 的复杂度遍历 u 的子集

进而可以在 $O(3^n)$ 的时间复杂度内遍历大小为 n 的集合的每个子集的子集

```
int n=13;
for(int i=n;i;i=(i-1)&n){}
//遍历子集的子集
for(int i=n;i;i=(i-1)&n) {
    for(int j=i;j;j=(j-1)&i) {}
}
```

组合数

从排成一排的 n 个球里选出 r 个球互不相邻的方案种数是 $c(n-r+1,r)$

从围成一圈的 n 个球里选出 r 个球互不相邻的方案种数是 $c(n-r,r) \times \frac{n}{n-r}$

(第二个结论相当于分类讨论选不选一号球(自己规定的)然后转化成两个第一个结论的问题)

$\sum_{i=0}^n i \times c(n,i) = n2^{n-1}$ 把组合数都提出来个 n 然后二项式定理显然。

同理, 有 $\sum_{i=0}^n i^2 \times c(n,i) = n(n+1)2^{n-2}$

$\sum_{i=0}^n c(i,k) = c(n+1,k+1)$

$c(n,r)c(r,k) = c(n,k)c(n-k,r-k)$ 通过组合意义证明。

上指标反转(其实在我这里变成了下指标反转) $c(r,k) = (-1)^k c(k-r-1,k)$, k 是整数, 对于任意的整数 n 都成立!!! 所以对于“下指标”和 (-1) 同时出现的, 要提高警惕。

比如现在有 $(-1)^m c(n-1,m) = (-1)^n c(-m-1,n)$ 整数 $m, n \geq 0$ 因为两边都等于 $c(m+n,m)$

又比如 $\sum_{k \leq m} c(r,k) (-1)^k = c(r,0) - c(r,1) + \dots + (-1)^m c(r,m) = \sum_{k \leq m} c(k-r-1,k) = c(m-r,m) = (-1)^m c(r-1,m)$

有意思的关系式 $\sum_{k \leq m} c(m+r,k) x^k y^{m-k} = \sum_{k \leq m} c(-r,k) (-x)^k (x+y)^{m-k}$, m 为整数, 用数学归纳法可以证明, 此处省略。

令 $x=-1$ 并令 $y=1$ 则有 $\sum_{k \leq m} c(m+r,k) (-1)^k = c(-r,m)$

令 $x=1$ 并令 $y=1, r=m+1$ 则有 $\sum_{k \leq m} c(2m+1,k) = \sum_{k \leq m} c(m+k,k) 2^{m-k}$

又因为左侧是求了一半的组合数, 所以是 $2^{2m+1-1} = 2^{2m}$ 所以这个式子等价于 $2^m = \sum_{k \leq m} c(m+k,k) 2^{-k}$

$\sum_k c(l,m+k) c(s+k,n) (-1)^k = (-1)^{l+m} c(s-m,n-l)$ 整数 $l \geq 0, m, n$ 为整数, 数学归纳法, 先拆后合可证, 这里省略。

$\sum_{k \leq l} c(l-k,m) c(s,k-n) (-1)^k = (-1)^{l+m} c(s-m-1,l-m-n)$, 整数 $l, m, n \geq 0$

$$\sum_{-q \leq k \leq l} c(l-k, m) c(q+k, m) = c(l+q+1, m+n+1) \quad \square \text{整数 } m, n \geq 0, \text{ 整数 } l+q \geq 0$$

例题

1. 求 $\frac{\sum_{k=0}^m c(m, k) c(n, k)}{c(n, m)}$ \square 整数 $n \geq m \geq 0$

我们自然是希望统一分母，貌似没有选择，统一成 $c(n, m)$ 会好一些，又因为我们有 $c(n, m) c(m, k) = c(n, k) c(n-k, m-k)$ \square 所以原式等于 $\frac{\sum_{k=0}^m c(n-k, m-k) c(n, m)}{c(n, m)}$ \square 分子用 $t = m - k$ 换个元，再带公式，就知道是 $c(n+1, m)$ 和分母分别写成阶乘的形式，最后结果是 $\frac{n+1}{n+1-m}$

斐波那契数列

$\sum_{i=0}^n c(n-i, i) = F(n+1)$ \square 其中 $F(n)$ 表示斐波那契数列的第 n 项， $F(0) = F(1) = 1$ \square 数学归纳法加组合数公式可证。

斐波那契通项公式 $F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$

斐波那契二倍项和一倍相邻项有关

$F_{2k} = F_k(2F_{k+1} - F_k)$ \square 这里的是 $F_1 = F_2 = 1$ 的。

$F_{2k+1} = F_{k+1}^2 + F_k^2$

这两个式子可以用数学归纳法（螺旋）一直证上去就结束了。

斐波那契数列中间项平方和相邻项乘积有关

$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ 设 $T(n) = F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2$ \square $T(2) = 1$ \square 且 $T(n+1) = -T(n)$ 可证，所以原式成立

$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n$ 数学归纳法照证不误（拆项）。

令 $k = n$ \square 我们得到 $F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$ \square 所以 $F_{2n} = (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$

$(F_m, F_n) = F_{(m, n)}$

卢卡斯数列 $L_0 = 2, L_1 = 1, L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ \square 前几项为 $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots$

卢卡斯数列通项公式 $L_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

事实上，我们有 $\frac{L_n + F_n \sqrt{5}}{2} = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$

又有 $L_n^2 - 5F_n^2 = (-4)^n$

$2L_{m+n} = 5F_m F_n + L_m L_n$

$2F_{m+n} = F_m L_n + L_m F_n$

$L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n$

$$F_{2n} = F_n L_n$$

考虑模 p 意义下的斐波那契数列，有一个结论是，周期不会超过 $6p$ 且只有在满足 $p=2 \times 5^k$ 的形式时才取等号。

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:%E7%8E%8B%E6%99%BA%E5%BD%AA:%E6%95%B0%E7%90%86%E7%9F%A5%E8%AF%86&rev=1628584982

Last update: 2021/08/10 16:43

