

# 数理知识总结

## 位运算

判断一个数是不是  $2^k$  的非负整数次幂

```
bool isPowerOfTwo(int n) {
    return n>0&&(n&(n-1))==0;
}
```

对2的非负整数次幂取模

$\text{mod}$  代表  $2^k$

```
int modPowerOfTwo(int x,int mod) {
    return x&(mod-1);
}
```

取绝对值

在某些机器上效率比  $n>0?n:-n$  高

```
int Abs(int n) {
    return (n^(n>>31))-(n>>31);
}
long long Abs(long long n) {
    return (n^(n>>63))-(n>>63);
}
```

取两个数的最大/最小值

在某些机器上效率比  $a>b?a:b$  高 如果  $a>=b,(a-b)>>31$  为  $0$  , 否则为  $-1$

```
int max(int a, int b) { return b & ((a - b) >> 31) | a & (~ (a - b) >> 31); }
int min(int a, int b) { return a & ((a - b) >> 31) | b & (~ (a - b) >> 31); }
```

模拟集合操作

差集是  $a \& (\sim b)$  对称差是  $a \wedge b$

子集遍历

可以遍历一个数代表的集合中所有非空子集包括自己

这个复杂度为  $O(2^{\text{popcount}(u)})$  的复杂度遍历  $u$  的子集

进而可以在  $O(3^n)$  的时间复杂度内遍历大小为  $n$  的集合的每个子集的子集

```
int n=13;
for(int i=n;i;i=(i-1)&n){}
//遍历子集的子集
for(int i=n;i;i=(i-1)&n) {
    for(int j=i;j;j=(j-1)&i) {}
}
```

## 组合数

从排成一排的  $n$  个球里选出  $r$  个球互不相邻的方案种数是  $c(n-r+1,r)$

从围成一圈的  $n$  个球里选出  $r$  个球互不相邻的方案种数是  $c(n-r,r) \times \frac{n}{n-r}$

(第二个结论相当于分类讨论选不选一号球(自己规定的)然后转化成两个第一个结论的问题)

$\sum_{i=0}^n i \times c(n,i) = n2^{n-1}$  把组合数都提出来个  $n$  然后二项式定理显然。

同理, 有  $\sum_{i=0}^n i^2 \times c(n,i) = n(n+1)2^{n-2}$

$\sum_{i=0}^n c(i,k) = c(n+1,k+1)$

$c(n,r)c(r,k) = c(n,k)c(n-k,r-k)$  通过组合意义证明。

上指标反转(其实在我这里变成了下指标反转)  $c(r,k) = (-1)^k c(k-r-1,k)$ ,  $k$  是整数, 对于任意的整数  $n$  都成立!!! 所以对于“下指标”和  $(-1)$  同时出现的, 要提高警惕。

比如现在有  $(-1)^m c(n-1,m) = (-1)^n c(-m-1,n)$  整数  $m, n \geq 0$  因为两边都等于  $c(m+n,m)$

又比如  $\sum_{k \leq m} c(r,k) (-1)^k = c(r,0) - c(r,1) + \dots + (-1)^m c(r,m) = \sum_{k \leq m} c(k-r-1,k) = c(m-r,m) = (-1)^m c(r-1,m)$

有意思的关系式  $\sum_{k \leq m} c(m+r,k) x^k y^{m-k} = \sum_{k \leq m} c(-r,k) (-x)^k (x+y)^{m-k}$ ,  $m$  为整数, 用数学归纳法可以证明, 此处省略。

令  $x=-1$  并令  $y=1$  则有  $\sum_{k \leq m} c(m+r,k) (-1)^k = c(-r,m)$

令  $x=1$  并令  $y=1, r=m+1$  则有  $\sum_{k \leq m} c(2m+1,k) = \sum_{k \leq m} c(m+k,k) 2^{m-k}$

又因为左侧是求了一半的组合数, 所以是  $2^{2m+1-1} = 2^{2m}$  所以这个式子等价于  $2^m = \sum_{k \leq m} c(m+k,k) 2^{-k}$

$\sum_k c(l,m+k) c(s+k,n) (-1)^k = (-1)^{l+m} c(s-m,n-l)$  整数  $l \geq 0, m, n$  为整数, 数学归纳法, 先拆后合可证, 这里省略。

$\sum_{k \leq l} c(l-k,m) c(s,k-n) (-1)^k = (-1)^{l+m} c(s-m-1,l-m-n)$ , 整数  $l, m, n \geq 0$

$$\sum_{-q \leq k \leq l} c(l-k, m) c(q+k, m) = c(l+q+1, m+n+1) \quad \square \text{整数 } m, n \geq 0, \text{ 整数 } l+q \geq 0$$

### 例题

1. 求  $\frac{\sum_{k=0}^m c(m, k) c(n, k)}{c(n, m)}$   $\square$  整数  $n \geq m \geq 0$

我们自然是希望统一分母，貌似没有选择，统一成  $c(n, m)$  会好一些，又因为我们有  $c(n, m) c(m, k) = c(n, k) c(n-k, m-k)$   $\square$  所以原式等于  $\frac{\sum_{k=0}^m c(n-k, m-k) c(n, m)}{c(n, m)}$   $\square$  分子用  $t = m - k$  换个元，再带公式，就知道是  $c(n+1, m)$  和分母分别写成阶乘的形式，最后结果是  $\frac{n+1}{n+1-m}$

## 斐波那契数列

$\sum_{i=0}^n c(n-i, i) = F(n+1)$   $\square$  其中  $F(n)$  表示斐波那契数列的第  $n$  项， $F(0) = F(1) = 1$   $\square$  数学归纳法加组合数公式可证。

斐波那契通项公式  $F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$

斐波那契二倍项和一倍相邻项有关

$F_{2k} = F_k(2F_{k+1} - F_k)$   $\square$  这里的是  $F_1 = F_2 = 1$  的。

$F_{2k+1} = F_{k+1}^2 + F_k^2$

这两个式子可以用数学归纳法（螺旋）一直证上去就结束了。

斐波那契数列中间项平方和相邻项乘积有关

$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$  设  $T(n) = F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2$   $\square$   $T(2) = 1$   $\square$  且  $T(n+1) = -T(n)$  可证，所以原式成立

$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n$  数学归纳法照证不误（拆项）。

令  $k = n$   $\square$  我们得到  $F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$   $\square$  所以  $F_{2n} = (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$

$(F_m, F_n) = F_{(m, n)}$

卢卡斯数列  $L_0 = 2, L_1 = 1, L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$   $\square$  前几项为  $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots$

卢卡斯数列通项公式  $L_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

事实上，我们有  $\frac{L_n + F_n \sqrt{5}}{2} = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$

又有  $L_n^2 - 5F_n^2 = (-4)^n$

$2L_{m+n} = 5F_m F_n + L_m L_n$

$2F_{m+n} = F_m L_n + L_m F_n$

$L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n$

$$F_{2n} = F_n L_n$$

考虑模  $p$  意义下的斐波那契数列，有一个结论是，周期不会超过  $6p$  且只有在满足  $p=2 \times 5^k$  的形式时才取等号。

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:%E7%8E%8B%E6%99%BA%E5%BD%AA:%E6%95%B0%E7%90%86%E7%9F%A5%E8%AF%86&rev=1628584982](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:%E7%8E%8B%E6%99%BA%E5%BD%AA:%E6%95%B0%E7%90%86%E7%9F%A5%E8%AF%86&rev=1628584982)

Last update: 2021/08/10 16:43