数理知识总结

位运算

判断一个数是不是 2 的非负整数次幂

```
bool isPowerOfTwo(int n) {
    return n>0&&(n&(n-1))==0;
}
```

对2的非负整数次幂取模

mod 代表 2^{k}

```
int modPowerOfTwo(int x,int mod) {
    return x&(mod-1);
}
```

取绝对值

在某些机器上 效率比 $n>0?n:-n$ 高

```
int Abs(int n) {
    return (n^(n>>31))-(n>>31);
}
long long Abs(long long n) {
    return (n^(n>>63))-(n>>63);
}
```

取两个数的最大/最小值

在某些机器上 效率比 $a>b?a:b$ 高 如果 $a>=b,(a-b)>>31$ 为 0， 否则为 -1

```
int max(int a, int b) { return b & ((a - b) >> 31) | a & (~(a - b) >> 31); }
int min(int a, int b) { return a & ((a - b) >> 31) | b & (~(a - b) >> 31); }
```

模拟集合操作

差集是 $a\&(~b)$ 对称差是 a^b

子集遍历

可以遍历一个数代表的集合中所有非空子集包括自己

这个复杂度为 $O(2^{popcount(u)})$ 的复杂度遍历 u 的子集

进而可以在 $O(3^{n})$ 的时间复杂度内遍历大小为n的集合的每个子集的子集

```
int n=13;
for(int i=n;i;i=(i-1)&n){}
//遍历子集的子集
for(int i=n;i;i=(i-1)&n) {
    for(int j=i;j;j=(j-1)&i) {}
}
```

组合数

从排成一排的 n 个球里选出 r 个球互不相邻的方案种数是 $c(n-r+1,r)$ □

从围成一圈的 n 个球里选出 r 个球互不相邻的方案种数是 $c(n-r,r)×{\frac n {(n-r)}}$ □

（第二个结论相当于分类讨论选不选一号球（自己规定的）然后转化成两个第一个结论的问题）

$\sum_{i=0}^{n} i×c(n,i)=n2^{n-1}$ □把组合数都提出来个 n □然后二项式定理显然。

同理，有 $\sum_{i=0}^{n} i^{2}×c(n,i)=n(n+1)2^{n-2}$

$\sum_{i=0}^{n} c(l,k)=c(n+1,k+1)$

$c(n,r)c(r,k)=c(n,k)c(n-k,r-k)$ □通过组合意义证明。

上指标反转（其实在我这里变成了下指标反转□□ $c(r,k)=(-1)^{k}c(k-r-1,k),k$ 是整数，对于任意的整数 n 都成立！！！所以对于“下指标”和 (-1) 同时出现的，要提高警惕。

比如现在有 $(-1)^{m}c(-n-1,m)=(-1)^{n}c(-m-1,n)$ □整数 $m,n≥0$ □因为两边都等于 $c(m+n,m)$

又比如 $\sum_{k≤m}c(r,k)(-1)^{k}=c(r,0)-c(r,1)+\ldots+(-1)^{m}c(r,m)=\sum_{k≤m}c(k-r-1,k)=c(m-r,m)=(-1)^{m}c(r-1,m)$

有意思的关系式□ $\sum_{k≤m}c(m+r,k)x^{k}y^{m-k}=\sum_{k≤m}c(-r,k)(-x)^{k}(x+y)^{m-k},m$ 为整数，用数学归纳法可以证明，此处省略。

令 $x=-1$ 并令 $y=1$ □则有 $\sum_{k≤m}c(m+r,k)(-1)^{k}=c(-r,m)$

令 $x=1$ 并令 $y=1,r=m+1$ □则有 $\sum_{k≤m}c(2m+1,k)=\sum_{k≤m}c(m+k,k)2^{m-k}$

又因为左侧是求了一半的组合数，所以是 $2^{2m+1-1}=2^{2m}$ □所以这个式子等价于 $2^{m}=\sum_{k≤m}c(m+k,k)2^{-k}$

$\sum_{k}c(l,m+k)c(s+k,n)(-1)^{k}=(-1)^{l+m}c(s-m,n-l)$ □整数 $l≥0,m,n$ 为整数，数学归纳法，先拆后合可证，这里省略。

$\sum_{k≤l}c(l-k,m)c(s,k-n)(-1)^{k}=(-1)^{l+m}c(s-m-1,l-m-n),$ 整数 $l,m,n≥0$

$\sum_{-q≤k≤l}c(l-k,m)c(q+k,m)=c(l+q+1,m+n+1)$ 整数 $m,n≥0,$ 整数 $l+q≥0$

例题

1.求 ${\frac {\sum_{k=0}^{m}c(m,k)} c(n,k)}$ 整数 $n≥m≥0$

我们自然是希望统一分母，貌似没有选择，统一成 $c(n,m)$ 会好一些，又因为我们有 $c(n,m)c(m,k)=c(n,k)c(n-k,m-k)$ 所以原式等于 ${\frac {\sum_{k=0}^{m}c(n-k,m-k)} {c(n,m)}}$ 分子用 $t=m-k$ 换个元，再带公式，就知道是 $c(n+1,m)$ 和分母分别写成阶乘的形式，最后结果是 ${\frac {n+1} {n+1-m}}$

斐波那契数列

$\sum_{i=0}^{n} c(n-i,i)=F(n+1)$ 其中 $F(n)$ 表示斐波那契数列的第 n 项， $F(0)=F(1)=1$ 数学归纳法加组合数公式可证。

斐波那契通项公式 $F_{n}={\frac {({\frac {1+\sqrt{5}} 2})^{n}-({\frac {1-\sqrt{5}} 2})^{n}} {\sqrt{5}}}$

斐波那契二倍项和一倍相邻项有关

$F_{2k}=F_{k}(2F_{k+1}-F_{k})$ 这里的是 $F_{1}=F_{2}=1$ 的。

$F_{2k+1}={F_{k+1}}^{2}+{F_{k}}^{2}$

这两个式子可以用数学归纳法（螺旋）一直证上去就结束了。

斐波那契数列中间项平方和相邻项乘积有关

$F_{n-1}F_{n+1}-{F_{n}}^{2}=(-1)^{2}$ 设 $T(n)=F_{n-1}F_{n+1}-{F_{n}}^{2}$ $T(2)=1$ 且 $T(n+1)=-T(n)$ 可证，所以原式成立

$F_{n+k}=F_{k}F_{n+1}+F_{k-1}F_{n}$ 数学归纳法照证不误（拆项）。

令 $k=n$ 我们得到 $F_{2n}=F_{n}(F_{n+1}+F_{n-1})$ 所以 $F_{2n}=(F_{n+1}-F_{n-1})(F_{n+1}+F_{n-1})=F_{n+1}^{2}-F{n-1}^{2}$

$(F_{m},F_{n})=F_{(m,n)}$

卢卡斯数列 $L_{0}=2,L_{1}=1,L_{n}=L_{n-1}+L_{n-2}$ 前几项为 $2,1,3,4,7,11,18\cdots$

卢卡斯数列通项公式 $L_{n}={({\frac {1+\sqrt{5}} 2})^{n}+({\frac {1-\sqrt{5}} 2})^{n}}$

事实上，我们有 ${\frac {L_{n}+F_{n}\sqrt{5}} 2}=({\frac {1+\sqrt{5}} 2})^{n}$

又有 ${L_{n}}^{2}-5{F_{n}}^{2}=(-4)^{n}$

$2L_{m+n}=5F_{m}F_{n}+L_{m}L_{n}$

$2F_{m+n}=F_{m}L_{n}+L_{m}F_{n}$

$L_{2n}=L_{n}^{2}-2(-1)^{n}$

$F_{2n}=F_{n}L_{n}$

考虑模 p 意义下的斐波那契数列，有一个结论是，周期不会超过 $6p$ □且只有在满足 $p=2\times5^{k}$ 的形式时才取等号。