

类欧几里得算法

算法思想

我们设 $f(a,b,c,n)=\sum_{i=0}^n \lfloor \frac{ai+b}{c} \rfloor$

其中 a,b,c,n 为常数，我们需要一个 $O(\log n)$ 的算法。

如果 $a \geq c$ 或者 $b \geq c$ 我们可以将 a,b 对 c 取模来化简问题：

$$f(a,b,c,n)=\sum_{i=0}^n \lfloor \frac{ai+b}{c} \rfloor$$

$$=\sum_{i=0}^n \lfloor \frac{(\lfloor \frac{a}{c} \rfloor c + a \bmod c) + (\lfloor \frac{b}{c} \rfloor c + b \bmod c)}{c} \rfloor$$

$$=\lfloor \frac{n(n+1)}{2} \rfloor \lfloor \frac{a}{c} \rfloor + (n+1) \lfloor \frac{b}{c} \rfloor + \sum_{i=0}^n \lfloor \frac{(a \bmod c) + (b \bmod c)}{c} \rfloor$$

$$=\lfloor \frac{n(n+1)}{2} \rfloor \lfloor \frac{a}{c} \rfloor + (n+1) \lfloor \frac{b}{c} \rfloor + f(a \bmod c, b \bmod c, n)$$

这样我们就将前两个参数控制到一定比第三个参数小的形式了。

$$\sum_{i=0}^n \lfloor \frac{ai+b}{c} \rfloor = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{ai+b}{c} \rfloor} 1$$

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:%E7%8E%8B%E6%99%BA%E5%BD%AA%E7%B1%BB%E6%AC%A7%E5%87%A0%E9%87%8C%E5%BE%97%E7%AE%97%E6%B3%95&rev=1629034867

Last update: 2021/08/15 21:41

