类欧几里得算法

算法思想

我们设 $f(a,b,c,n)=\sum_{i=0}^{n}\lfloor {\frac {ai+b} {c}} \rfloor$

其中 a,b,c,n 为常数，我们需要一个 $O(logn)$ 的算法。

如果 $a≥c$ 或者 $b≥c$ □我们可以将 a,b 对 c 取模来化简问题：

$f(a,b,c,n)=\sum_{i=0}^{n}\lfloor {\frac {ai+b} {c}} \rfloor$

$=\sum_{i=0}^{n}\lfloor {\frac {(\lfloor {\frac a c} \rfloor c+a\ mod\ c)i+(\lfloor {\frac b c} \rfloor c+b\ mod\ c)} {c}} \rfloor$

$={\frac {n(n+1)} {2}}\lfloor {\frac a c} \rfloor+(n+1)\lfloor {\frac b c} \rfloor+\sum_{i=0}^{n}\lfloor {\frac {(a\ mod\ c)i+(b\ mod\ c)} {c}} \rfloor$

$={\frac {n(n+1)} {2}}\lfloor {\frac a c} \rfloor+(n+1)\lfloor {\frac b c} \rfloor+f(a\ mod\ c,b\ mod\ c,c,n)$

这样我们就将前两个参数控制到一定比第三个参数小的形式了。

我们有 $\sum_{i=0}^{n}\lfloor {\frac {ai+b} {c}} \rfloor=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{\lfloor {\frac {ai+b} {c}} \rfloor-1}1$

然后我们交换和号：

$\sum_{j=0}^{\lfloor {\frac {an+b} {c}} \rfloor-1}\sum_{i=0}^{n}[j<\lfloor {\frac {ai+b} {c}} \rfloor]$

对于里面的式子，我们可以变换一下：

$j<\lfloor {\frac {ai+b} {c}} \rfloor \Leftrightarrow j+1≤\lfloor {\frac {ai+b} {c}} \rfloor\Leftrightarrowj+1≤{\frac {ai+b} {c}}\Leftrightarrowjc+c≤ai+b\Leftrightarrowjc+c-b-1 □ai\Leftrightarrow\lfloor {\frac {jc+c-b-1} {a}} \rfloor□i$

这样我们设 $m=\lfloor {\frac {an+b} {c}} \rfloor$

原式变为□ $f(a,b,c,n)=\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n}[i□\lfloor {\frac {jc+c-b-1} {a}} \rfloor]=\sum_{j=0}^{m-1}(n-\lfloor {\frac {jc+c-b-1} {a}} \rfloor)=nm-f(c,c+b-1,a,m-1)$ □然后第一个参数又比第三个大了，就一直取模这样，类似于求最大公约数。