

类欧几里得算法

算法思想

我们设 $f(a,b,c,n)=\sum_{i=0}^n \lfloor \frac{ai+b}{c} \rfloor$

其中 a,b,c,n 为常数，我们需要一个 $O(\log n)$ 的算法。

如果 $a \geq c$ 或者 $b \geq c$ 我们可以将 a,b 对 c 取模来化简问题：

$$f(a,b,c,n)=\sum_{i=0}^n \lfloor \frac{ai+b}{c} \rfloor$$

$$= \sum_{i=0}^n \lfloor \frac{\lfloor \frac{a}{c} \rfloor c + a \bmod c + \lfloor \frac{b}{c} \rfloor c + b \bmod c}{c} \rfloor$$

$$= \lfloor \frac{n(n+1)}{2} \rfloor \lfloor \frac{a}{c} \rfloor + (n+1) \lfloor \frac{b}{c} \rfloor + \sum_{i=0}^n \lfloor \frac{(a \bmod c)i + (b \bmod c)}{c} \rfloor$$

$$= \lfloor \frac{n(n+1)}{2} \rfloor \lfloor \frac{a}{c} \rfloor + (n+1) \lfloor \frac{b}{c} \rfloor + f(a \bmod c, b \bmod c, c, n)$$

这样我们就将前两个参数控制到一定比第三个参数小的形式了。

$$\sum_{i=0}^n \lfloor \frac{ai+b}{c} \rfloor = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{ai+b}{c} \rfloor} 1$$

然后我们交换和号：

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{an+b}{c} \rfloor} \sum_{i=0}^n [j < \frac{ai+b}{c}]$$

对于里面的式子，我们可以变换一下：

$$j < \frac{ai+b}{c} \iff j+1 \leq \frac{ai+b}{c} \iff \lfloor \frac{ai+b}{c} \rfloor + 1 \leq \frac{ai+b}{c} \iff \lfloor \frac{ai+b}{c} \rfloor c + c \leq ai+b \iff \lfloor \frac{ai}{c} \rfloor \leq \lfloor \frac{jc+c-b-1}{a} \rfloor$$

这样我们设 $m = \lfloor \frac{an+b}{c} \rfloor$

原式变为 $f(a,b,c,n) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^n [i \leq \lfloor \frac{jc+c-b-1}{a} \rfloor] = \sum_{j=0}^{m-1} (n - \lfloor \frac{jc+c-b-1}{a} \rfloor) = nm - f(c, c+b-1, a, m-1)$ 然后第一个参数又比第三个大了，就一直取模这样，类似于求最大公约数。

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string-%E7%8E%8B%E6%99%BA%E5%BD%AA%E7%B1%BB%E6%AC%A7%E5%87%A0%E9%87%8C%E5%BE%97%E7%AE%97%E6%B3%95&rev=1629038288

Last update: 2021/08/15 22:38

