

Educational Codeforces Round 111

[比赛链接](#)

D. Excellent Arrays

题意

我们称满足以下条件的数组 a 为好数组

$a_{i} \neq i, i \in [1, n], n$ 是数组长度

我们规定 $F(a)$ 为一个数组中满足 $1 \leq i < j \leq n$ 且 $a_i + a_j = i + j$ 的对数。

再规定完美的数组为好数组且 $l \leq a_i \leq r$ 且它的 F 函数值为所有好数组中最大的那个，给定 n, l, r 求完美数组的个数对 $10^9 + 7$ 取模

$1 \leq l \leq 1000, 2 \leq n \leq 2 \cdot 10^5, -10^9 \leq l \leq 1, n \leq r \leq 10^9$

不难发现对于给定的 n 最大的 F 值应为 $\frac{n^2}{4}$

首先证明其为上界，因为 $a_i \neq i$ 所以对于任意一个数，要么它变大了要么它变小了，假设有 x 个变大的，则有 $n-x$ 个变小的，就算所有的大+小都正好和原来的下标和一样，也只有 $x \times (n-x)$ 对，可以证明无论 n 是奇数还是偶数，这个值都等于 $\frac{n^2}{4}$ 故为上界。

而构造是显而易见的，将这个数组分成两组（如果是奇数就分成差为1的两组），一组同时加1，另一组同时减1即可，注意 n 要分在减的那组，1要分在加的那组，这样一定保证所有的数变化后依然在 $[1, n]$ 范围内，又由题目的 l, r 的范围知这样一定满足题意。

下面的问题是如何计数。我们可以分类讨论出最大的要加的值和最小的要减的值，这两个决定我们能加/减多少。我们不妨先讨论简答的情况：即 n 是偶数的情况。刨除一种特殊的情况是1到 $\frac{n}{2}$ 的数要增加 $\frac{n}{2} + 1$ 到 n 的数减小。这时这两种数的区域没有交点，这种情况的答案是 $\min(\frac{n}{2} + 1 - l, r - \frac{n}{2})$ 其余的情况我们设最大的要加的值为 j 取值范围为 $[\frac{n}{2}, n]$ 最小的要减的值为 i 取值范围为 $[1, \frac{n}{2}]$ 这种情况下移动的长度是 $\min(i - l, r - j)$ 因为既不能加过头，也不能减过头。于是这个式子是 $\sum_{j=\frac{n}{2}}^n \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \min(i - l, r - j) \cdot \mathbb{1}_{j - i - 1 \geq r - j}$ 之后分 $i - l \geq r - j$ 和 $i - l < r - j$ 讨论，注意边界范围就可以了，这个看起来是 $O(n^2)$ 的，但是它是很多组合数相加，分别利用 $c(n, k) + c(n - 1, k) + \dots + c(k, k) = c(n + 1, k + 1)$ 和 $c(n, 0) + c(n + 1, 1) + \dots + c(n + k, k) = c(n + k + 1, k)$ 就可以做到整个式子 $O(n)$ 算出来了，这样复杂度 $O(n)$ 可以通过。

奇数的情况只需要分类讨论是增加的多还是减小的多就可以了，相当于两个上述问题。

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
const ll mod=1e9+7;
int n,l,r;
int inv[200100],jc[200100];
int C(int n,int m) {
```

```
if(n<m||n<0||m<0) return 0;
if(n==m) return 1;
return 1ll*jc[n]*inv[m]%mod*inv[n-m]%mod;
}
int min(int a,int b) {
if(a>b) return b;
return a;
}
int max(int a,int b) {
if(a<b) return b;
return a;
}
int main() {
inv[0] = inv[1] = jc[0] = 1;
for(ll i=1; i<=200010; ++i) {
jc[i]=1ll*jc[i-1]*i%mod;
}
for(ll i=2; i<=200010; ++i) {
inv[i]=(ll)(mod-mod/i)*inv[mod%i]%mod;
}
for(ll i=2; i<=200010; ++i) {
inv[i]=1ll*inv[i-1]*inv[i]%mod;
}
int t;
scanf("%d",&t);
while(t--){
scanf("%d %d %d",&n,&l,&r);
ll ans=min(r-n/2,n/2+1-l);
if(n%2==0) {
for(int j=n/2+1; j<=n; j++) {
if(r-j+l>n/2) continue;
int down=max(1,r-j+l);
ans=(ans+1ll*(r-j)*C(j-down,j-n/2)%mod)%mod;
}
for(int i=1; i<=n/2; i++) {
if(l+r-i-1<n/2+1) continue;
int up=min(n,l+r-i-1);
ans=(ans+1ll*(i-l)*C(up-i,up-n/2-1)%mod)%mod;
}
printf("%lld\n",ans);
} else {
ans=(ans+min(r-n/2-1,n/2+2-l))%mod;
for(int j=n/2+1; j<=n; j++) {
if(r-j+l>n/2) continue;
int down=max(1,r-j+l);
ans=(ans+1ll*(r-j)*C(j-down,j-n/2)%mod)%mod;
}
for(int i=1; i<=n/2; i++) {
if(l+r-i-1<n/2+1) continue;
int up=min(n,l+r-i-1);
```

```
        ans=(ans+1ll*(i-l)*C(up-i,up-n/2-1)%mod)%mod;
    }
    for(int j=n/2+2; j<=n; j++) {
        if(r-j+l>n/2+1) continue;
        int down=max(1,r-j+l);
        ans=(ans+1ll*(r-j)*C(j-down,j-n/2-1)%mod)%mod;
    }
    for(int i=1; i<=n/2+1; i++) {
        if(l+r-i-1<n/2+2) continue;
        int up=min(n,l+r-i-1);
        ans=(ans+1ll*(i-l)*C(up-i,up-n/2-2)%mod)%mod;
    }
    printf("%lld\n",ans);
}
}
return 0;
}
```

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:%E7%8E%8B%E6%99%BA%E5%BD%AA:contest:educational_codeforces_round_111&rev=1626353264

Last update: 2021/07/15 20:47