

FWT快速沃尔什变换

算法思想

或卷积

大概长这个样子 $C_k = \sum_{i|j=k} A_i \times B_j$

满足交换律、结合律 $(A+B)|C = A|C+B|C$ 均为显然

几个重要的结论：

$$FWT(A+B) = FWT(A) + FWT(B)$$

$FWT(A) = (FWT(A_0), FWT(A_0) + FWT(A_1))$ A_0 表示最高位为 0 的部分，也就是前 2^{n-1} 项； A_1 表示最高位为 1 的部分，也就是后 2^{n-1} 项。

对于 or 卷积来说 $FWT(A)[i] = \sum_{j|i} A[j]$

此时用数学归纳法有：

$$FWT(A|B)$$

$$= FWT((A|B)_0, (A|B)_1)$$

$$= FWT(A_0|B_0, A_0|B_1 + A_1|B_0 + A_1|B_1)$$

$$= (FWT(A_0|B_0), FWT(A_0|B_0 + A_0|B_1 + A_1|B_0 + A_1|B_1))$$

$$= (FWT(A_0) \times FWT(B_0), FWT(A_0) \times FWT(B_0) + FWT(A_0) \times FWT(B_1) + FWT(A_1) \times FWT(B_0) + FWT(A_1) \times FWT(B_1))$$

$$= (FWT(A_0) \times FWT(B_0), (FWT(A_0) + FWT(A_1)) \times (FWT(B_0) + FWT(B_1)))$$

$$= (FWT(A_0, FWT(A_0 + A_1))) \times (FWT(B_0, FWT(B_0 + B_1)))$$

$$= FWT(A) \times FWT(B)$$

得证

所以类似于 FFT 也有一个叫做 IFWT 的东西。

$$IFWT(A) = (IFWT(A_0), IFWT(A_1) - IFWT(A_0))$$

和卷积

和或卷积类似

结论：

$$FWT(A) = (FWT(A_0) + A_1, FWT(A_1))$$

$$FWT(A+B) = FWT(A) + FWT(B)$$

同样的数学归纳法可以证明和卷积成立

$$IFWT(A) = (IFWT(A_0) - IFWT(A_1), IFWT(A_1))$$

异或卷积

结论：

$$FWT(A) = (FWT(A_0) + FWT(A_1), FWT(A_0) - FWT(A_1))$$

$$FWT(A+B) = FWT(A) + FWT(B)$$

$$IFWT(A) = (\frac{IFWT(A_0) + IFWT(A_1)}{2}, \frac{IFWT(A_0) - IFWT(A_1)}{2})$$

$A_i = \sum_{C_1} C_1 A_j - \sum_{C_2} C_2 A_j$ C_1 表示 i 的奇偶性为 0 C_2 表示奇偶性为 1，其中奇偶性代表二进制为 1 的个数的奇偶性)

同或卷积

$$FWT(A) = (FWT(A_0) - FWT(A_1), FWT(A_0) + FWT(A_1))$$

$$FWT(A+B) = FWT(A) + FWT(B)$$

$$IFWT(A) = (\frac{IFWT(A_0) - IFWT(A_1)}{2}, \frac{IFWT(A_0) + IFWT(A_1)}{2})$$

$A_i = \sum_{C_1} C_1 A_j - \sum_{C_2} C_2 A_j$ C_1 表示 i 的奇偶性为 0 C_2 表示奇偶性为 1，其中奇偶性代表二进制为 1 的个数的奇偶性)

算法实现

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
const int MAXN=150000;

int MOD=998244353;
int inv2=(MOD+1)>>1,N;
ll a1[MAXN],b1[MAXN],a2[MAXN],b2[MAXN],a3[MAXN],b3[MAXN];

void or_FWT(ll *P,int opt) {
    for(int i=2; i<=N; i<=1)
        for(int p=i>>1,j=0; j<N; j+=i)
            for(int k=j; k<j+p; ++k)
                P[k+p]+=P[k]*opt,P[k+p]=(P[k+p]+MOD)%MOD;
```

```

}

void and_FWT(ll *P,int opt) {
    for(int i=2; i<=N; i<=1)
        for(int p=i>>1,j=0; j<N; j+=i)
            for(int k=j; k<j+p; ++k)
                P[k]+=P[k+p]*opt,P[k]=(P[k]+MOD)%MOD;
}

void xor_FWT(ll *P,int opt) {//如果不是在模意义下的话,把逆元变成直接除二就好了。
    for(int i=2; i<=N; i<=1)
        for(int p=i>>1,j=0; j<N; j+=i)
            for(int k=j; k<j+p; ++k) {
                ll x=P[k],y=P[k+p];
                P[k]=(x+y)%MOD;
                P[k+p]=(x-y+MOD)%MOD;
            }
    if(opt==-1)P[k]=1ll*P[k]*inv2%MOD,P[k+p]=1ll*P[k+p]*inv2%MOD;
}

void tor_FWT(ll *P,int opt) {//同或卷积
    for(int i=2;i<=N;i<=1) {
        for(int p=i>>1,j=0;j<N;j+=i) {
            for(int k=j;k<j+p;++k) {
                ll x=P[k],y=P[k+p];
                P[k]=(x-y+MOD)%MOD;
                P[k+p]=(x+y)%MOD;
                if(opt==-1)
                    P[k]=1ll*P[k]*inv2%MOD,P[k+p]=1ll*P[k+p]*inv2%MOD;
            }
        }
    }
}

int main() {
    scanf("%d",&N);
    N=1<<N;
    for(int i=0;i<N;i++) {
        scanf("%lld",&a1[i]);
        a2[i]=a3[i]=a1[i];
    }
    for(int i=0;i<N;i++) {
        scanf("%lld",&b1[i]);
        b2[i]=b3[i]=b1[i];
    }
    or_FWT(a1,1);or_FWT(b1,1);
    for(int i=0;i<N;i++) a1[i]=a1[i]*b1[i]%MOD;
    or_FWT(a1,-1);
    and_FWT(a2,1);and_FWT(b2,1);
    for(int i=0;i<N;i++) a2[i]=a2[i]*b2[i]%MOD;
    and_FWT(a2,-1);
}

```

```
xor_FWT(a3,1);xor_FWT(b3,1);
for(int i=0;i<N;i++) a3[i]=a3[i]*b3[i]%MOD;
xor_FWT(a3,-1);
for(int i=0;i<N;i++) {
    printf("%lld ",a1[i]);
}
putchar(10);
for(int i=0;i<N;i++) {
    printf("%lld ",a2[i]);
}
putchar(10);
for(int i=0;i<N;i++) {
    printf("%lld ",a3[i]);
}
putchar(10);
return 0;
}
```

代码练习

1.<https://www.luogu.com.cn/problem/CF1119H>

题目大意

给定 n 个三元组，以及三个数 x, y, z 每个三元组的内容为 $\{a_i, b_i, c_i\}$ 表示这个组里面有 x 个 a_i y 个 b_i z 个 c_i 再给一个数 N 让求对于 0 到 $2^N - 1$ 分别有多少种方案，使得在每个三元组中各选出一个数字，异或的结果等于这个数字，方案数对 998244353 取模。其中 $n \leq 10^5, N \leq 17$

题目解析

貌似可以把元组中的数字理解为某个多项式中 a_i 次幂的系数是 x b_i 次幂的系数是 y c_i 次幂的系数是 z 之后对于 n 个多项式，顺次进行 FWT 最后再 IFWT 但是想法很好，这样的复杂度是 $O(nk2^k)$ 显然是爆炸了。

我们再回去观察题目，为什么是三元组，也就是说一个多项式中只有三项的系数不为零，且都固定为 x, y, z 则 $\text{FWT}(F_k)[i] = c(i, a_k)x + c(i, b_k)y + c(i, c_k)z$ 其中 $c(i, j)$ 表示异或卷积从 j 到 i 的变换系数。而 $c(i, j) = (-1)^{\text{cnt}(i \& j)}$ 所以这个式子就是 $\text{FWT}(F_k)[i] = (-1)^{\text{cnt}(i \& a_k)}x + (-1)^{\text{cnt}(i \& b_k)}y + (-1)^{\text{cnt}(i \& c_k)}z$ 于是现在我们可以如此算出每一个式子的 FWT 再求 IFWT 但是这样的复杂度仍然是 $O((n+k)2^k)$ 仍然是爆炸的。所以到这里还远没有结束。

我们发现现在要求的是 $S[i] = \prod_{k=1}^n \text{FWT}(F_k)[i]$ 将每一项的系数都求出来，最后再 IFWT 就可以了。又因为对于等号右侧的每一项，一共只有八种可能，即 x, y, z 可正可负。当我们把每一项出现的次数求出，就可以利用快速幂求得此项答案，这样单独一项系数的复杂度就由 $O(n)$ 降为 $O(\log n)$ 就可以通过了。这里有一个小技巧，我们可以控制其中一项的系数为正，比如我们将每个元组

的三个数都对 a 这个数异或，这样元组变为 $(0, b_k \oplus a_k, c_k \oplus a_k)$ 。我们最后再把结果的次数异或回去所有的 a_k 就是真正的次数了。这样所有的 a 被我们控制为 0，和任何的 i 取与都是 0。于是八种可能变成了四种可能，即 $x+y+z, x+y-z, x-y+z, x-y-z$ 。

我们分别设这四种出现的次数为 c_1, c_2, c_3, c_4 。显然四者之和为 n 。我们接下来用待定系数法的思想，比如我们把 y 重新取为 1，其余设为 0。这样求一个 FWT 出来，对应 i 次的系数是所有 $(-1)^{\text{cnt}(i \& b_k)}$ 的和。这个值是 $c_1 + c_2 - c_3 - c_4$ 。同理可以对 z 操作一下，这样我们一共有三个式子。最后一个式子是令 $b_k \oplus c_k$ 的系数为 1。于是这个就是前两种情况的卷积，又因为 FWT 是可以乘起来的，所以它就是 $(-1)^{\text{cnt}(i \& b_k)} (-1)^{\text{cnt}(i \& c_k)}$ 。这个和对应的是 $c_1 - c_2 - c_3 + c_4$ 。所以四个方程都有了，解个方程，最后快速幂一搞，最终复杂度是 $O((k + \log n) 2^k)$ 可以通过。

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
const int MAXN=2000010;

int MOD=998244353;
int inv2=(MOD+1)>>1,N,n,x,y,z;
ll a1[MAXN],b1[MAXN],a2[MAXN],b2[MAXN],a3[MAXN],b3[MAXN];

ll quick_power(ll a,ll t,ll mod) {
    ll ans=1;
    while(t) {
        if(t&1)ans=ans*a%mod;
        a=a*a%mod;
        t>>=1;
    }
    return ans;
}

void or_FWT(ll *P,int opt) {
    for(int i=2; i<=N; i<=1)
        for(int p=i>>1,j=0; j<N; j+=i)
            for(int k=j; k<j+p; ++k)
                P[k+p]+=P[k]*opt,P[k+p]=(P[k+p]+MOD)%MOD;
}

void and_FWT(ll *P,int opt) {
    for(int i=2; i<=N; i<=1)
        for(int p=i>>1,j=0; j<N; j+=i)
            for(int k=j; k<j+p; ++k)
                P[k]+=P[k+p]*opt,P[k]=(P[k]+MOD)%MOD;
}

void xor_FWT(ll *P,int opt) {
    for(int i=2; i<=N; i<=1)
        for(int p=i>>1,j=0; j<N; j+=i)
            for(int k=j; k<j+p; ++k) {
                ll x=P[k],y=P[k+p];
```

```
        P[k]=(x+y)%MOD;
        P[k+p]=(x-y+MOD)%MOD;
if(opt==-1)P[k]=1ll*P[k]*inv2%MOD,P[k+p]=1ll*P[k+p]*inv2%MOD;
    }
}

int main() {
    scanf("%d %d",&n,&N);
    N=1<<N;
    int sum=0;
    scanf("%d %d %d",&x,&y,&z);
    for(int i=0,a,b,c; i<n; i++) {
        scanf("%d %d %d",&a,&b,&c);
        sum^=a;
        b^=a;
        c^=a;
        a1[b]++;
        a2[c]++;
        a3[b^c]++;
    }
    xor_FWT(a1,1);
    xor_FWT(a2,1);
    xor_FWT(a3,1);
    for(int i=0; i<N; i++) {
        int c1=(1ll*n+a1[i]+a2[i]+a3[i])%MOD/4;
        int c2=(1ll*n+a1[i]-c1-c1+MOD)%MOD/2;
        int c3=(1ll*n+a2[i]-c1-c1+MOD)%MOD/2;
        int c4=(1ll*n+a3[i]-c1-c1+MOD)%MOD/2;
        ll ans=1;
        ans=ans*quick_power((1ll*x+y+z),c1,MOD)%MOD;
        ans=ans*quick_power((1ll*x+y-z+MOD)%MOD,c2,MOD)%MOD;
        ans=ans*quick_power((1ll*x-y+z+MOD)%MOD,c3,MOD)%MOD;
        ans=ans*quick_power((1ll*x-y-z+MOD*2)%MOD,c4,MOD)%MOD;
        b1[i]=ans;
    }
    xor_FWT(b1,-1);
    for(int i=0;i<N;i++) {
        printf("%lld ",b1[i^sum]);
    }
    return 0;
}
```

2.<https://www.luogu.com.cn/problem/P6097>

是一个模板题，又叫子集卷积，在原来的或卷积的基础 $|i|j|=k$ 上，加上了 $|i| \& |j|=0$ 的限制条件。

$|i|j|=k$ 的限制条件还是用 FWT 计算卷积。

对于第二个限制，等价于 $\text{popcount}(i)+\text{popcount}(j)=\text{popcount}(i|j)$ □首先显然要新开一维记录每个位置

的 popcount 然后让 $f_{i,j} = a_j (\text{popcount}(j)=i)$ 不然 $f_{i,j} = 0$ $g_{i,j}$ 同理，然后有 $h_i = \sum_{k=0}^i f_k \times g_{i-k}$ 最后所求答案为 $h_{\text{popcount}(i)}$ 这样复杂度是 $O(n^2 2^n)$ 的。

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
const int MAXN=1048577;
const ll MOD=1e9+9,inv2=(MOD+1)>>1;

int N,lim,pc[MAXN];
int a2[21][MAXN],b2[21][MAXN],ans[21][MAXN];

void or_FWT(int *P,int opt) {
    for(int i=2; i<=N; i<=1)
        for(int p=i>>1,j=0; j<N; j+=i)
            for(int k=j; k<j+p; ++k)
                P[k+p]+=P[k]*opt,P[k+p]=(P[k+p]+MOD)%MOD;
}

void solve_or_FWT() {
    for(int i=0;i<=lim;i++) or_FWT(a2[i],1),or_FWT(b2[i],1);
    for(int i=0;i<=lim;i++) {
        for(int j=0;j<=i;j++) {
            for(int k=0;k<N;k++) {
                ans[i][k]=(ans[i][k]+1ll*a2[j][k]*b2[i-j][k]%MOD)%MOD;
            }
        }
    }
    for(int i=0;i<=lim;i++) or_FWT(ans[i],-1);
}

void print_or_FWT() {
    for(int i=0;i<N;i++) printf("%d ",ans[pc[i]][i]);
    putchar(10);
}

int main() {
    scanf("%d",&N);
    lim=N;
    N=1<<N;
    for(int i=0;i<N;i++) pc[i]=__builtin_popcount(i);
    for(int i=0;i<N;i++) scanf("%d",&a2[pc[i]][i]);
    for(int i=0;i<N;i++) scanf("%d",&b2[pc[i]][i]);
    solve_or_FWT();
    print_or_FWT();
    return 0;
}
```

3.牛客第七场E

题意

给了 n 堆石子和 m 个可以取走的石子的数量，记为 x_i 。除了这 m 种石子，还可以取莫比乌斯函数值为 1 的数量石子。同时给出这 n 堆石子的数量范围 $[l_i, r_i]$ 。求所有的情况中，先手必胜的局数，局面不同当且仅当存在一堆石子在两个局面中数量不同。

$$1 \leq n \leq 10^6, 1 \leq l_i, r_i \leq 10^5, 1 \leq m \leq 5, 1 \leq x_i \leq 10^5$$

题解

大综合题，显然需要会莫比乌斯反演（废话），还需要会博弈论的 sg 那套理论，先手必胜当且仅当所有的 sg 值异或起来不为 0。听出题人说 sg 值最高不会超过 230，但是现场的时候怎么知道嘛...

显然需要先筛出来 1 到 100000 的莫比乌斯函数值，才能知道哪些能加进去，然后再把 m 种数字也放进去，然后就是看每个状态的后继状态，这里也是学到了可以暴力搞。

对于每一个新的值 i 搞一个数组，看这个值的后继状态有没有 sg 为这个值的，如果有需要继续找，直到找不到，根据 mex 那套理论，就是此时的 sg 了。然后 i 加上刚才放进去的那些数的后继状态可以到达 i 于是这些状态的后继 sg 值可以有现在这个值，这里我们只关心能不能有，所以可以用 $bitset$ 优化一下，这部分的复杂度是 $O(\frac{100000^2}{w} + 256 \times 100000)$ 这里本来要写 230 的，但是后面需要变成 256。

于是我们处理出了所有石子数的 sg 值，接下来对于每一堆石子，我们可以求出来，他们这个范围内，分别有多少个 sg 值为 0 的，有多少个 sg 值为 1 的，依次类推。

然后我们需要关心有多少个 $a[1] \wedge a[2] \wedge \dots \wedge a[n] \neq 0$ 这玩意显然可以看成 FWT 我们先统计出每个区间内有多少个 sg 值为 i 的，这显然前缀和就可以。然后我们相当于看 n 个多项式相乘，每个多项式的幂次是各个 sg 值，系数是有多少个状态的 sg 值是这个值。如果对于每个求 FWT 再乘起来，最后再 $IFWT$ 我们需要开到 256，这就照应了前面。算了一下，单个复杂度是 $O(256 \times \log_2(256)) = O(2048)$ 然后 n 个就是 2×10^9 的，这显然是自杀行为。

然后 $soi-wiki$ 上一段话刷新了我对 FWT 的认知：若我们令 $i \& j$ 中 1 的奇偶性为 i 与 j 的奇偶性，于是 i 与 k 的奇偶性异或 j 与 k 的奇偶性等于 $i \wedge j$ 与 k 的奇偶性。然后可以得到异或的 FWT $A_i = \sum_{C_1} A_j - \sum_{C_2} A_j$ C_1 表示 $i \& j$ 的奇偶性为偶 C_2 表示 $i \& j$ 的奇偶性为奇。（其实记住就行...）

又因为 sg 的范围有限，所以我们可以先预处理出每个数的二进制有多少位为 1（或者直接 `__builtin_popcount` 也可以）。

然后对于前缀和数组，就不能直接暴力加一了，判断两者与的奇偶性，如果为偶，则加一，不然减一。然后这样就直接把每一堆的 FWT 数组给求完了，复杂度变成 $O(256n)$ 而不是原来的 $O(2048n)$ 再全乘起来求一个 $IFWT$ 就可以了，整个这部分的复杂度都是 $O(256n)$ 的，最后对于所有 sg 值不为 0 的结果都加起来就是答案了。

另外这题卡常！前缀和数组必须大的做第一维，我不倒过来会 tt 掉绝大多数数据，倒过来效率就第一了...

```

const int maxn=100000,N=1e6+10,maxm=256,MOD=1e9+7,inv2=500000004;
bool check[maxn+1];
int prime[maxn+1],mu[maxn+1];
int
tot,n,m,ls[N],rs[N],sg[maxn+1],sum[maxn+1][maxm+1],ans[maxm+1],o[maxm+1];
bitset<maxn+1> t,b[maxm];

void Moblus() {
    mu[1]=1;
    for(int i=2; i<=maxn; i++) {
        if(!check[i]) {
            mu[i]=-1;
            prime[tot++]=i;
        }
        for(int j=0; j<tot; j++) {
            if(i*prime[j]>maxn) break;
            check[i*prime[j]]=true;
            if(i%prime[j]==0) {
                mu[i*prime[j]]=0;
                break;
            } else {
                mu[i*prime[j]]=-mu[i];
            }
        }
    }
}

void xor_FWT(int *P,int opt,int N) {
    for(int i=2; i<=N; i<=1)
        for(int p=i>>1,j=0; j<N; j+=i)
            for(int k=j; k<j+p; ++k) {
                int x=P[k],y=P[k+p];
                P[k]=((ll)x+y)%MOD;
                P[k+p]=((ll)x-y+MOD)%MOD;
            }
    if(opt==-1) P[k]=(ll)P[k]*inv2%MOD,P[k+p]=(ll)P[k+p]*inv2%MOD;
}

void init() {
    o[0]=0;
    for(int i=1;i<maxm;i++)o[i]=o[i>>1]+(i&1);
    for(int i=1; i<=maxn; i++) {
        if(mu[i]==1)t.set(i);
    }
    for(int i=0; i<=maxn; i++) {
        sg[i]=0;
        while(b[sg[i]][i]) sg[i]++;
        b[sg[i]]|=(t<<i);
    }
}

```

```
}

int main() {
    Moblus();
    read(n);read(m);
    for(int i=1; i<=n; i++) read(ls[i]),read(rs[i]);
    for(int i=1,tmp; i<=m; i++) read(tmp),t.set(tmp);
    init();
    for(int i=0; i<=maxn; i++)
        for(int j=0; j<maxm; j++)
            if(!(o[sg[i]&j]&1))sum[i][j]=1;
            else sum[i][j]=MOD-1;
    for(int i=1; i<=maxn; i++) {
        for(int j=0; j<maxm; j++) {
            sum[i][j]=sum[i][j]+sum[i-1][j];
            if(sum[i][j]>=MOD) sum[i][j]-=MOD;
        }
    }
    for(int i=0; i<maxm; i++)ans[i]=1;
    for(int i=1; i<=n; i++)
        for(int j=0; j<maxm; j++)
            ans[j]=(ll)ans[j]*(sum[rs[i]][j]-sum[ls[i]-1][j])%MOD;
    xor_FWT(ans,-1,maxm);
    ll sum=0;
    for(int i=1; i<maxm; i++) {
        sum=sum+ans[i];
        if(sum>=MOD) sum-=MOD;
    }
    printf("%lld\n", (sum+MOD)%MOD);
    return 0;
}
```

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:%E7%8E%8B%E6%99%BA%E5%BD%AA:fwf

Last update: 2021/08/14 09:08