

FWT快速沃尔什变换

算法思想

或卷积

大概长这个样子 $C_k = \sum_{i+j=k} A_i \times B_j$

满足交换律、结合律 $(A+B)|C=A|C+B|C$ 均为显然

几个重要的结论：

$$FWT(A+B) = FWT(A) + FWT(B)$$

$FWT(A) = (FWT(A_0), FWT(A_0) + FWT(A_1))$ A_0 表示最高位为 0 的部分，也就是前 2^{n-1} 项； A_1 表示最高位为 1 的部分，也就是后 2^{n-1} 项。

对于 or 卷积来说 $FWT(A)[i] = \sum_{j|i} A[j]$

此时用数学归纳法有：

$$FWT(A|B)$$

$$= FWT((A|B)_0, (A|B)_1)$$

$$= FWT(A_0|B_0, A_0|B_1 + A_1|B_0 + A_1|B_1)$$

$$= (FWT(A_0|B_0), FWT(A_0|B_0 + A_0|B_1 + A_1|B_0 + A_1|B_1))$$

$$= (FWT(A_0) \times FWT(B_0), FWT(A_0) \times FWT(B_0) + FWT(A_0) \times FWT(B_1) + FWT(A_1) \times FWT(B_0) + FWT(A_1) \times FWT(B_1))$$

$$= (FWT(A_0) \times FWT(B_0), (FWT(A_0) + FWT(A_1)) \times (FWT(B_0) + FWT(B_1)))$$

$$= (FWT(A_0, FWT(A_0 + A_1))) \times (FWT(B_0, FWT(B_0 + B_1)))$$

$$= FWT(A) \times FWT(B)$$

得证

所以类似于 FFT 也有一个叫做 IFWT 的东西。

$$IFWT(A) = (IFWT(A_0), IFWT(A_1) - IFWT(A_0))$$

和卷积

和或卷积类似

结论：

$$FWT(A) = (FWT(A_0) + A_1, FWT(A_1))$$

$$FWT(A+B) = FWT(A) + FWT(B)$$

同样的数学归纳法可以证明和卷积成立

$$IFWT(A) = (IFWT(A_0) - IFWT(A_1), IFWT(A_1))$$

异或卷积

结论：

$$FWT(A) = (FWT(A_0) + FWT(A_1), FWT(A_0) - FWT(A_1))$$

$$FWT(A+B) = FWT(A) + FWT(B)$$

$$IFWT(A) = (\frac{IFWT(A_0) - IFWT(A_1)}{2}, \frac{IFWT(A_0) + IFWT(A_1)}{2})$$

算法实现

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
const int MAXN=1500000;

int MOD=998244353;
int inv2=(MOD+1)>>1,N;
ll a1[MAXN],b1[MAXN],a2[MAXN],b2[MAXN],a3[MAXN],b3[MAXN];

void or_FWT(ll *P,int opt) {
    for(int i=2; i<=N; i<<=1)
        for(int p=i>>1,j=0; j<N; j+=i)
            for(int k=j; k<j+p; ++k)
                P[k+p]+=P[k]*opt,P[k+p]=(P[k+p]+MOD)%MOD;
}

void and_FWT(ll *P,int opt) {
    for(int i=2; i<=N; i<<=1)
        for(int p=i>>1,j=0; j<N; j+=i)
            for(int k=j; k<j+p; ++k)
                P[k]+=P[k+p]*opt,P[k]=(P[k]+MOD)%MOD;
}

void xor_FWT(ll *P,int opt) {//如果不是在模意义下的话，把逆元变成直接除二就好了。
    for(int i=2; i<=N; i<<=1)
        for(int p=i>>1,j=0; j<N; j+=i)
            for(int k=j; k<j+p; ++k) {
                ll x=P[k],y=P[k+p];
```

```

        P[k]=(x+y)%MOD;
        P[k+p]=(x-y+MOD)%MOD;
if(opt==-1)P[k]=1ll*P[k]*inv2%MOD,P[k+p]=1ll*P[k+p]*inv2%MOD;
    }
}

int main() {
    scanf("%d",&N);
    N=1<<N;
    for(int i=0;i<N;i++) {
        scanf("%lld",&a1[i]);
        a2[i]=a3[i]=a1[i];
    }
    for(int i=0;i<N;i++) {
        scanf("%lld",&b1[i]);
        b2[i]=b3[i]=b1[i];
    }
    or_FWT(a1,1);or_FWT(b1,1);
    for(int i=0;i<N;i++) a1[i]=a1[i]*b1[i]%MOD;
    or_FWT(a1,-1);
    and_FWT(a2,1);and_FWT(b2,1);
    for(int i=0;i<N;i++) a2[i]=a2[i]*b2[i]%MOD;
    and_FWT(a2,-1);
    xor_FWT(a3,1);xor_FWT(b3,1);
    for(int i=0;i<N;i++) a3[i]=a3[i]*b3[i]%MOD;
    xor_FWT(a3,-1);
    for(int i=0;i<N;i++) {
        printf("%lld ",a1[i]);
    }
    putchar(10);
    for(int i=0;i<N;i++) {
        printf("%lld ",a2[i]);
    }
    putchar(10);
    for(int i=0;i<N;i++) {
        printf("%lld ",a3[i]);
    }
    putchar(10);
    return 0;
}

```

代码练习

1.<https://www.luogu.com.cn/problem/CF1119H>

题目大意

给定 n 个三元组，以及三个数 x,y,z 每个三元组的内容为 $\{a_i,b_i,c_i\}$ 表示这个组里面

有 x 个 a_i y 个 b_i z 个 c_i 再给一个数 N 让求对于 0 到 2^N-1 分别有多少种方案，使得在每个三元组中各选出一个数字，异或的结果等于这个数字，方案数对 998244353 取模。其中 $n \leq 10^5, N \leq 17$

题目解析

貌似可以把元组中的数字理解为某个多项式中 a_i 次幂的系数是 x b_i 次幂的系数是 y c_i 次幂的系数是 z 之后对于 n 个多项式，顺次进行 FWT 最后再 IFWT 但是想法很美好，这样的复杂度是 $O(nk^2)$ 显然是爆炸了。

我们再回去观察题目，为什么是三元组，也就是说一个多项式中只有三项的系数不为零，且都固定为 x, y, z 则 $\text{FWT}(F_k)[i] = c(i, a_k)x + c(i, b_k)y + c(i, c_k)z$ 其中 $c(i, j)$ 表示异或卷积从 j 到 i 的变换系数。而 $c(i, j) = (-1)^{\text{cnt}(i \& j)}$ 所以这个式子就是 $\text{FWT}(F_k)[i] = (-1)^{\text{cnt}(i \& a_k)}x + (-1)^{\text{cnt}(i \& b_k)}y + (-1)^{\text{cnt}(i \& c_k)}z$ 于是现在我们可以如此算出每一个式子的 FWT 再求 IFWT 但是这样的复杂度仍然是 $O((n+k)2^k)$ 仍然是爆炸的。所以到这里还远没有结束。

我们发现现在要求的是 $S[i] = \prod_{k=1}^n \text{FWT}(F_k)[i]$ 将每一项的系数都求出来，最后再 IFWT 就可以了。又因为对于等号右侧的每一项，一共只有八种可能，即 x, y, z 可正可负。当我们把每一项出现的次数求出，就可以利用快速幂求得此项答案，这样单独一项系数的复杂度就由 $O(n)$ 降为 $O(\log n)$ 就可以通过了。这里有一个小技巧，我们可以控制其中一项的系数为正，比如我们将每个元组的三个数都对 a 这个数异或，这样元组变为 $(0, b_k \oplus a_k, c_k \oplus a_k)$ 我们最后再把结果的次数异或回去所有的 a_k 就是真正的次数了。这样所有的 a 被我们控制为 0，和任何的 i 取与都是 0。于是八种可能变成了四种可能，即 $x+y+z, x+y-z, x-y+z, x-y-z$

我们分别设这四种出现的次数为 c_1, c_2, c_3, c_4 显然四者之和为 n 我们接下来用待定系数法的思想，比如我们把 y 重新取为 1 ，其余设为 0 。这样求一个 FWT 出来，对应 i 次方的系数是所有 $(-1)^{\text{cnt}(i \& b_k)}$ 的和。这个值是 $c_1 + c_2 - c_3 - c_4$ 同理可以对 z 操作一下，这样我们一共有三个式子。最后一个式子是令 $b_k \oplus c_k$ 的系数为 1 。于是这个就是前两种情况的卷积，又因为 FWT 是可以乘起来的，所以它就是 $(-1)^{\text{cnt}(i \& b_k)}(-1)^{\text{cnt}(i \& c_k)}$ 这个和对应的是 $c_1 - c_2 - c_3 + c_4$ 所以四个方程都有了，解个方程，最后快速幂一搞，最终复杂度是 $O((k+\log n)2^k)$ 可以通过。

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
const int MAXN=200010;

int MOD=998244353;
int inv2=(MOD+1)>>1, N, n, x, y, z;
ll a1[MAXN], b1[MAXN], a2[MAXN], b2[MAXN], a3[MAXN], b3[MAXN];

ll quick_power(ll a, ll t, ll mod) {
    ll ans=1;
    while(t) {
        if(t&1) ans=ans*a%mod;
        a=a*a%mod;
        t>>=1;
    }
}
```

```

    return ans;
}

void or_FWT(ll *P,int opt) {
    for(int i=2; i<=N; i<=1)
        for(int p=i>>1,j=0; j<N; j+=i)
            for(int k=j; k<j+p; ++k)
                P[k+p]+=P[k]*opt,P[k+p]=(P[k+p]+MOD)%MOD;
}

void and_FWT(ll *P,int opt) {
    for(int i=2; i<=N; i<=1)
        for(int p=i>>1,j=0; j<N; j+=i)
            for(int k=j; k<j+p; ++k)
                P[k]+=P[k+p]*opt,P[k]=(P[k]+MOD)%MOD;
}

void xor_FWT(ll *P,int opt) {
    for(int i=2; i<=N; i<=1)
        for(int p=i>>1,j=0; j<N; j+=i)
            for(int k=j; k<j+p; ++k) {
                ll x=P[k],y=P[k+p];
                P[k]=(x+y)%MOD;
                P[k+p]=(x-y+MOD)%MOD;
            }
    if(opt==-1)P[k]=1ll*P[k]*inv2%MOD,P[k+p]=1ll*P[k+p]*inv2%MOD;
}

int main() {
    scanf("%d %d",&n,&N);
    N=1<<N;
    int sum=0;
    scanf("%d %d %d",&x,&y,&z);
    for(int i=0,a,b,c; i<n; i++) {
        scanf("%d %d %d",&a,&b,&c);
        sum^=a;
        b^=a;
        c^=a;
        a1[b]++;
        a2[c]++;
        a3[b^c]++;
    }
    xor_FWT(a1,1);
    xor_FWT(a2,1);
    xor_FWT(a3,1);
    for(int i=0; i<N; i++) {
        int c1=(1ll*n+a1[i]+a2[i]+a3[i])%MOD/4;
        int c2=(1ll*n+a1[i]-c1-c1+MOD)%MOD/2;
        int c3=(1ll*n+a2[i]-c1-c1+MOD)%MOD/2;
        int c4=(1ll*n+a3[i]-c1-c1+MOD)%MOD/2;
        ll ans=1;
    }
}

```

```
ans=ans*quick_power((1ll*x+y+z),c1,MOD)%MOD;
ans=ans*quick_power((1ll*x+y-z+MOD)%MOD,c2,MOD)%MOD;
ans=ans*quick_power((1ll*x-y+z+MOD)%MOD,c3,MOD)%MOD;
ans=ans*quick_power((1ll*x-y-z+MOD*2)%MOD,c4,MOD)%MOD;
b1[i]=ans;
}
xor_FWT(b1,-1);
for(int i=0;i<N;i++) {
    printf("%lld ",b1[i^sum]);
}
return 0;
}
```

2. <https://www.luogu.com.cn/problem/P6097>

是一个模板题，又叫子集卷积，在原来的或卷积的基础 $|i|+|j|=k$ 上，加上了 $|i| \& |j|=0$ 的限制条件。

$|i|+|j|=k$ 的限制条件还是用 FWT 计算卷积。

对于第二个限制，等价于 $\text{popcount}(i)+\text{popcount}(j)=\text{popcount}(i|j)$ 首先显然要新开一维记录每个位置的 popcount 然后让 $f_{i,j}=a_j(\text{popcount}(j)=i)$ 不然 $f_{i,j}=0$ $g_{i,j}$ 同理，然后有 $h_i=\sum_{k=0}^i f_k \times g_{i-k}$ 最后所求答案为 $h_{\text{popcount}(i)}$ 这样复杂度是 $O(n^2 2^n)$ 的。

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
const int MAXN=1048577;
const ll MOD=1e9+9,inv2=(MOD+1)>>1;

int N,lim,pc[MAXN];
int a[21][MAXN],b[21][MAXN],ans[21][MAXN];

void or_FWT(int *P,int opt) {
    for(int i=2; i<=N; i<=1)
        for(int p=i>>1,j=0; j<N; j+=i)
            for(int k=j; k<j+p; ++k)
                P[k+p]+=P[k]*opt,P[k+p]=(P[k+p]+MOD)%MOD;
}

void solve_or_FWT() {
    for(int i=0;i<=lim;i++) or_FWT(a[i],1),or_FWT(b[i],1);
    for(int i=0;i<=lim;i++) {
        for(int j=0;j<=i;j++) {
            for(int k=0;k<N;k++) {
                ans[i][k]=(ans[i][k]+1ll*a[j][k]*b[i-j][k]%MOD)%MOD;
            }
        }
    }
}
```

```
    for(int i=0;i<=lim;i++) or_FWT(ans[i],-1);
}

void print_or_FWT() {
    for(int i=0;i<N;i++) printf("%d ",ans[pc[i]][i]);
    putchar(10);
}

int main() {
    scanf("%d",&N);
    lim=N;
    N=1<<N;
    for(int i=0;i<N;i++) pc[i]=__builtin_popcount(i);
    for(int i=0;i<N;i++) scanf("%d",&a2[pc[i]][i]);
    for(int i=0;i<N;i++) scanf("%d",&b2[pc[i]][i]);
    solve_or_FWT();
    print_or_FWT();
    return 0;
}
```

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:%E7%8E%8B%E6%99%BA%E5%BD%AA:fwf&rev=1628818957

Last update: 2021/08/13 09:42