

[比赛链接](#)

补题情况

题目	蒋贤蒙	王赵安	王智彪
B	0	0	0
C	2	0	1
F	2	0	1
G	0	0	0
H	0	0	2
I	0	0	0
J	2	1	0

题解

C. Fuzzy Graph

题意

给定一个连通图，要求将图上每个点染成 RGB 三种颜色。对应边 (u,v) 如果 u,v 同色，则该边染成 u,v 的颜色，否则该边染成黑色。

要求构造一种染色方案，使得删除图中所有非黑边仍然可以使图连通，同时满足如下两个条件之一：

- RGB 三种颜色的点一样多，数据保证 $3 \mid n$
- X 是点集中出现次数最多的颜色(允许有其他颜色出现次数和他相同)，且不存在边的颜色为 X

题解

首先跑一遍 dfs 树，然后用 RG 两种颜色进行二染色，这样所有树边都是黑色边，图保证连通。

接下来，设 c_0 表示 R 颜色在点集中出现的次数，设 c_1 表示 G 颜色在点集中出现的次数。

若 $c_0 \leq \frac{n}{3}$ 或者 $c_1 \leq \frac{n}{3}$ 则考虑构造第二个条件：将所有叶子结点染成颜色 B

事实上，由于叶子结点在 dfs 树上只有返祖边，所以所有叶子节点之间一定没有连边，即不存在颜色为 B 的边。

另一方面，不妨设 $c_0 \leq \frac{n}{3}$ 则所有颜色为 G 的非叶子结点至少是一个颜色为 R 的结点的父亲，所以所有颜色为 G 的非叶子结点个数不超过 $\frac{n}{3}$

由于颜色为 R 的非叶子结点个数不超过颜色为 R 的结点总个数 c_0 所有颜色为 R 的非叶子结点个数也不超过 $\frac{n}{3}$

所以叶子结点总个数一定不小于 $\frac{n}{3}$ 且将叶子结点染成 B 后 B 出现次数一定最多。

若 $c_0 \geq \frac{n}{3}$ 且 $c_1 \geq \frac{n}{3}$ 则考虑构造第一个条件：从深到浅贪心染色，如果当前结点颜色出现个数大于 $\frac{n}{3}$ 且相邻结点颜色不为 B 则染成 B

事实上，设 $c_0 = \frac{n+d_0}{3}, c_1 = \frac{n+d_1}{3}$ 根据上述构造，易知 G 被染色成 B 的个数不超过 d_1

而由于是从深到浅染色，所以每个从 G 被染色成 B 的结点只会 ban 他的父结点，不考虑 ban 儿子结点。

所有 R 结点的可选染色位置最多被 ban d_1 个位置，于是要从余下 $\frac{n+d_0-d_1}{3}$ 个位置中选出 d_0 个位置，这一定是可行的。

同理，所有 G 结点一定也可以选出 d_1 个位置染成 B

总时间复杂度 $O(n+m)$

```
const int MAXN=3e5+5,MAXM=5e5+5;
const char s[]="RGB";
struct Edge{
    int to,next;
}edge[MAXM<<1];
int head[MAXN],edge_cnt;
void Insert(int u,int v){
    edge[++edge_cnt]=Edge{v,head[u]};
    head[u]=edge_cnt;
}
int ans[MAXN],fa[MAXN],d[MAXN],cnt[2];
bool fib[MAXN];
vector<int> node[MAXN],leaf;
void dfs(int u,int f){
    ans[u]=ans[f]^1;
    cnt[ans[u]]++;
    d[u]=d[f]+1;
    fa[u]=f;
    node[d[u]].push_back(u);
    bool flag=false;
    for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
        int v=edge[i].to;
        if(v==f||d[v])continue;
        flag=true;
        dfs(v,u);
    }
    if(!flag)
        leaf.push_back(u);
}
void solve(){
    int n=read_int(),m=read_int();
    _rep(i,1,n){
        head[i]=0;
    }
```

```

        d[i]=0;
        fib[i]=false;
        node[i].clear();
    }
    cnt[0]=cnt[1]=0;
    leaf.clear();
    edge_cnt=0;
    while(m--){
        int u=read_int(),v=read_int();
        Insert(u,v);
        Insert(v,u);
    }
    dfs(1,0);
    if(cnt[0]<=n/3||cnt[1]<=n/3){
        for(int v:leaf)
            ans[v]=2;
    }
    else{
        for(int i=n-1;i;i--){
            for(int v:node[i]){
                if(fib[v]||cnt[ans[v]]==n/3)continue;
                cnt[ans[v]]--;
                ans[v]=2;
                fib[fa[v]]=true;
            }
        }
        _rep(i,1,n)
        putchar(s[ans[i]]);
        putchar('\n');
    }
}
int main(){
    int T=read_int();
    while(T--)
        solve();
    return 0;
}

```

H.Scholomance Academy

注意到 $F(n)$ 是一个积性函数，因为对于两堆不同的质因子放进去，因为欧拉函数是积性函数，我都可以分成两堆，一堆装第一类，一堆装第二类，然后发现和单独相乘是一一对应的关系，必然相等。

于是我们单独对每个质因子拆开计算。

我们考虑生成函数 $G_p(x)=F(p^0)+F(p^1)+\dots$ 然后所有质因子的生成函数乘起来的 n 次项就是 $G(N)$ 的结果了。

这东西等于 $(\phi(p^0)+\phi(p^1)+\dots)^m$

化简得到 $(\frac{1-x}{1-px})^m$ 然后所有的质因子乘起来，最后分子分母都是最高次项为 m 次方的多项式，设除的结果为 $h(x)$ 我们要求 $h(x)$ 的第 n 次项，设分子为 $f(x)$ 分母为 $g(x)$

然后这东西是可以常系数齐次线性递推搞的：对于高于 m 次的系数 $[x^n]f(x)$ 必然是 0 ，然后有 $[x^n]f(x) = \sum_{i=0}^m [x^{n-i}]h(x) \times [x^i]g(x)$ 然后我们就有 $[x^n]h(x) \times [x^0]g(x) = -\sum_{i=1}^m [x^{n-i}]h(x) \times [x^i]g(x)$ 这玩意求逆元化简之后，就变成了一个常系数齐次线性递推的板子。

这里有两个需要注意的地方 n 比较小的时候，是要直接输出多项式逆元乘法的第 n 项，然后递推的时候递推的系数是 $[x^1]g(x)$ 到 $[x^m]g(x)$ 然后因为 $[x^m]f(x) \neq 0$ 所以这个 n 要从 $m+1$ 开始取，也就是说要我们初始项是 $[x^1]h(x)$ 到 $[x^m]h(x)$ 然后就需要向前挪一项，然后求 $n-1$ 次的系数。

```
#include <bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
const int N=2000006,GG=3,GI=332748118,mod=998244353;

inline void read(int &X) {
    X = 0;
    int w=0;
    char ch=0;
    while(!isdigit(ch)) {
        w|=ch=='-';
        ch=getchar();
    }
    while(isdigit(ch)) X=(X<<3)+(X<<1)+(ch^48),ch=getchar();
    if (w) X = -X;
}

namespace my_f {
    int qpow(int a,int b,int m=mod) {
        int r=1;
        while(b) {
            if (b&1) r=r*a%m;
            a=a*a%m,b>>=1;
        }
        return r;
    }
}

int pgg[50],pgi[50];
void init() {
    for(int i=0; i<=48; i++) {
        pgg[i]=qpow(GG, (mod-1)>>i);
        pgi[i]=qpow(GI, (mod-1)>>i);
    }
}

#define ad(x,y) ((x)+(y)>mod?(x)+(y)-mod:(x)+(y))
#define dc(x,y) ((x)-(y)<0?(x)-(y)+mod:(x)-(y))

namespace poly {
    int w[N],r[N];
    void NTT(int f[N],int lim,int type) {
```

```

for(int i=0; i<lim; i++) if (i<r[i]) swap(f[i],f[r[i]]);
for(int mid=1,pp=1; mid<lim; mid<=<=1,++pp) {
    int Wn=(type==1?pgg[pp]:pgi[pp]);
    w[0]=1;
    for(int i=1; i<mid; i++) w[i]=w[i-1]*Wn%mod;
    for(int i=0; i<lim; i+=(mid<<1)) {
        for(int j=0; j<mid; ++j) {
            int y=f[i|mid|j]*w[j]%mod;
            f[i|mid|j]=dc(f[i|j],y);
            f[i|j]=ad(f[i|j],y);
        }
    }
}
if (type==-1) {
    int ivv=qpow(lim,mod-2);
    for(int i=0; i<lim; i++) f[i]=f[i]*ivv%mod;
}
}
void init(int n) {
    r[0]=0;
    for(int i=1; i<n; i++)r[i]=(((r[i]>>1]>>1)|((i&1)*(n>>1))));
}
int pw[2][N],rev[N];
void pre() {
    for(int i=1; i<N;
i++)pw[0][i]=qpow(GG,(mod-1)/(i<<1)),pw[1][i]=qpow(GG,mod-1-
(mod-1)/(i<<1));
}
void vec NTT(vector<int> &a,int n,int o) {
    for(int i=0; i<n; i++)if(i<r[i])swap(a[i],a[r[i]]);
    for(int i=1; i<n; i<=<=1) {
        int wn;
        if(o==1)wn=pw[0][i];
        else wn=pw[1][i];
        for(int j=0; j<n; j+=(i<<1)) {
            int w=1;
            for(int k=0; k<i; k++) {
                int t=w*a[i+j+k]%mod;
                w=w*wn%mod;
                a[i+j+k]=(a[j+k]-t+mod)%mod;
                a[j+k]=(a[j+k]+t)%mod;
            }
        }
    }
}
if(o==-1) {
    int INV=qpow(n,mod-2);
    for(int i=0; i<=n; i++)a[i]=a[i]*INV%mod;
}
}
int pool[10][N];
inline void Inv(int f[N],int g[N],int n) { // 求逆, pool 0~2

```

```
int *iv=pool[0],*a=pool[1],*b=pool[2];
for(int i=0; i<=4*n; i++) iv[i]=a[i]=b[i]=0;
iv[0]=qpow(f[0],mod-2);

int len=1,lim=1;
for(len=1; len<=(n<<1); len<<=1) {
    lim=len<<1;

    for(int i=0; i<=4*len; i++) a[i]=b[i]=0;
    for(int i=0; i<len; i++) a[i]=f[i],b[i]=iv[i];
    for(int i=0; i<lim; i++) r[i]=((r[i]>>1)>>1)|((i&1)?len:0));
    NTT(a,lim,1);
    NTT(b,lim,1);
    for(int i=0; i<lim; i++) a[i]=(2*b[i]-
a[i]*b[i]%mod*b[i]%mod+mod)%mod;
    NTT(a,lim,-1);
    for(int i=0; i<len; i++) iv[i]=a[i];
}
for(int i=0; i<n; i++) g[i]=iv[i];
for(int i=n; i<lim; i++) g[i]=0;
}

vector<int> vec_mul(vector<int> a,vector<int> b) {
    int len=a.size()+b.size()-1,lim=1;
    while(lim<=len) lim<<=1;
    init(lim);
    a.resize(lim);
    vec_NTT(a,lim,1);
    b.resize(lim);
    vec_NTT(b,lim,1);
    for(int i=0; i<lim; i++)a[i]=a[i]*b[i]%mod;
    vec_NTT(a,lim,-1);
    a.resize(len);
    return a;
}

inline void mul(int f[N],int g[N],int n,bool flag=1) // *=, pool
3~4
// flag: 是否对n取膜
{
    int len=1,lim=1;
    while(len<=(n<<1)) len=lim,lim<<=1;
    int *a=pool[3],*b=pool[4];
    for(int i=0; i<lim; i++) a[i]=b[i]=0;
    for(int i=0; i<n; i++) a[i]=f[i],b[i]=g[i];
    for(int i=0; i<lim; i++) r[i]=((r[i]>>1)>>1)|((i&1)?len:0));
    NTT(a,lim,1);
    NTT(b,lim,1);
    for(int i=0; i<lim; i++) a[i]=a[i]*b[i]%mod;
    NTT(a,lim,-1);
    for(int i=0; i<2*n; i++) f[i]=a[i];
    for(int i=2*n; i<=lim; i++) f[i]=0;
```

5~6

```

    if (flag) for(int i=n; i<2*n; i++) f[i]=0;
}
void Mod(int f1[N],int f2[N],int n,int m,int R[N]) // 多项式取模, pool
// 这里只保留了余数, 商开到 pool 里而不是传参数修改了
{
    int *a=pool[5],*b=pool[6],*Q=pool[7];
    for(int i=0; i<=4*n; i++) a[i]=b[i]=0;
    for(int i=0; i<n; i++) a[i]=f1[n-1-i];
    for(int i=n-m+1; i<n; i++) a[i]=0; // a=f1_r%(x^(n-m+1))
    for(int i=0; i<m; i++) b[i]=f2[m-1-i];
    for(int i=n-m+1; i<m; i++) b[i]=0;
    Inv(b,b,n-m+1);
    mul(a,b,n-m+1);
    for(int i=0; i<=n-m; i++) Q[i]=a[n-m-i];

    for(int i=0; i<=4*n; i++) a[i]=b[i]=0;
    for(int i=0; i<n; i++) a[i]=f1[i];
    for(int i=0; i<m; i++) b[i]=f2[i];
    int len=1,lim=1;
    while(len<=n) len=lim,lim<<=1;
    for(int i=0; i<lim; i++) r[i]=((r[i]>>1)>>1)|((i&1)?len:0);
    NTT(b,lim,1);
    NTT(Q,lim,1);
    for(int i=0; i<lim; i++) b[i]=b[i]*Q[i]%mod;
    NTT(b,lim,-1);
    NTT(Q,lim,-1);
    for(int i=0; i<m-1; i++) R[i]=(a[i]-b[i]%mod+mod)%mod;
    for(int i=m-1; i<lim; i++) R[i]=0;
}
void PowMod(int f[N],int p,int g[N],int n,int h[N]) { // f^p%g, g
有n项, 保存在h
    int *res=pool[8];
    for(int i=0; i<=8*n; i++) res[i]=0;
    res[0]=1; // res=1
    while(p) {
        if (p&1) {
            mul(res,f,n,0); // res*=f
            Mod(res,g,2*n,n,res); // res%=g
        }
        mul(f,f,n,0); // f=f*f
        Mod(f,g,2*n,n,f); // f%=g
        p>>=1;
    }
    for(int i=0; i<n-1; i++) h[i]=res[i];
    for(int i=n; i<=8*n; i++) h[i]=0;
}
int n,T,m;
int
a[N],t[N],p[N],F[N],tmp[N],tmp1[N],tmp2[N],tmp3[N],fm[N],fm1[N],jc[N],inv[N

```

```
];  
vector<int> work(int l,int r) {  
    int mid=l+r>>1;  
    if(l==r) {  
        vector<int> ans(2);  
        ans[0]=1,ans[1]=mod-p[l];  
        return ans;  
    }  
    return poly::vec_mul(work(l,mid),work(mid+1,r));  
}  
  
void Input() {  
    init();  
    poly::pre();  
    read(n);  
    read(T);  
    read(m);  
    for(int i=1; i<=T; i++) read(p[i]);  
    fm[0]=1;  
    jc[0]=jc[1]=1;  
    for(int i=2; i<=m*T+1; i++) {  
        jc[i]=jc[i-1]*i%mod;  
    }  
    inv[0]=inv[1] = 1;  
    for(int i=2; i<=m*T+1; ++i) {  
        inv[i]=(mod-mod/i)*inv[mod%i]%mod;  
    }  
    for(int i=2; i<=m*T+1; ++i) {  
        inv[i]=inv[i]*inv[i-1]%mod;  
    }  
    vector<int> mkbk=work(1,T);  
    vector<int> fm2(1);  
    fm2[0]=1;  
    for(int i=1; i<=m; i++) {  
        fm2=poly::vec_mul(fm2,mkbk);  
    }  
    for(int i=0,flag=1; i<=m*T; i++,flag=-flag) {  
        tmp3[i]=flag*(jc[m*T]*inv[i]%mod*inv[m*T-i]%mod)%mod;  
        if(tmp3[i]<0) tmp3[i]+=mod;  
    }  
  
    for(int i=0; i<fm2.size(); i++) {  
        fm[i]=fm2[i];  
    }  
    long long ttmp=qpow(fm[0],mod-2);  
    for(int i=1; i<=m*T; i++) {  
        fm1[i]=(mod-fm[i])*ttmp%mod;  
    }  
    poly::Inv(fm,tmp2,m*T+1);  
    poly::mul(tmp2,tmp3,m*T+1,1);
```

```

        if(n<=m*T) {
            printf("%lld\n",tmp2[n]);
            exit(0);
        }
        for(int i=m*T+1; i<=2*m*T; i++) tmp2[i]=0;
        for(int i=0;i<=m*T;i++) {
            tmp2[i]=tmp2[i+1];
        }
    }
    int f[N],g[N],c[N];
    void Sakuya() {
        f[1]=1;
        for(int i=1; i<=m*T; i++) g[m*T-i]=(mod-fm1[i]);
        g[m*T]=1;
        poly::PowMod(f,n-1,g,m*T+1,c);

        int ans=0;
        for(int i=0; i<m*T; i++) ans=(ans+tmp2[i]*c[i]%mod)%mod;
        printf("%lld\n",ans);
    }
}
#undef int
using namespace my_f;
int main() {
    Input();
    Sakuya();
    return 0;
}

```

J. Tree

题意

给定一棵树和两个人的初始位置 s, t 两个人在树上轮流移动，两个人走过的点都不能再走且两个人不能在同一个点。

每个人的分数为自己无法移动时走过的点数，两个人都希望最大化自己和另一个人的分数差，问最终先手的分数减去后手分数的值。

题解

首先以先手为根建树，树形 dp 求出每个点 u 不经过 s, t 链上的点能到达的最远距离 $a(u)$ 设链上的点为 $v_1, v_2 \dots v_k$ 其中 $v_1 = s, v_k = t$

定义 $\text{solve}(l, r, 0/1)$ 表示第一个人位于 v_l 第二个人位于 v_r $0/1$ 表示轮到先手/后手行动的答案。

对 $\text{solve}(l,r,0)$ 先手如果选择进入子树，此时答案为 $a(v_l)+l-1-\max_{l \leq x \leq r}(a(v_x)+k-x)$

如果选择不进入子树，则答案为 $\text{solve}(l+1,r,1)$ 所以两种情况取 \max 即可，后手情况类似。

上述转移可以使用 ST 表，时间复杂度 $O(n \log n)$

```
const int MAXN=5e5+5,MAXM=20;
struct Edge{
    int to,next;
}edge[MAXN<<1];
int head[MAXN],edge_cnt;
void Insert(int u,int v){
    edge[++edge_cnt]=Edge{v,head[u]};
    head[u]=edge_cnt;
}
int p[MAXN];
multiset<int> dp[MAXN];
void dfs(int u,int fa){
    dp[u].insert(1);
    p[u]=fa;
    for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
        int v=edge[i].to;
        if(v==fa)continue;
        dfs(v,u);
        dp[u].insert(*dp[v].rbegin()+1);
    }
}
struct ST{
    int d[MAXN][MAXM],lg2[MAXN];
    void build(int *a,int n){
        lg2[1]=0;
        _rep(i,2,n)
        lg2[i]=lg2[i>>1]+1;
        _for(i,0,n)
        d[i][0]=a[i];
        for(int j=1;(1<<j)<=n;j++){
            _for(i,0,n+1-(1<<j))
                d[i][j]=max(d[i][j-1],d[i+(1<<(j-1))][j-1]);
        }
    }
    int query(int lef,int rig){
        int len=rig-lef+1;
        return max(d[lef][lg2[len]],d[rig-(1<<lg2[len])+1][lg2[len]]);
    }
}st1,st2;
int mv1[MAXN],mv2[MAXN];
int solve(int l,int r,int pos){
    if(l+1==r)
        return mv1[l]-mv2[r];
    if(pos==0)
```

```

return max(mv1[l]-st2.query(l+1,r),solve(l+1,r,!pos));
else
return min(st1.query(l,r-1)-mv2[r],solve(l,r-1,!pos));
}
int main(){
int n=read_int(),s=read_int(),t=read_int();
_for(i,1,n){
int u=read_int(),v=read_int();
Insert(u,v);
Insert(v,u);
}
dfs(s,0);
vector<int> vec;
int pos=t;
while(pos){
vec.push_back(pos);
pos=p[pos];
}
reverse(vec.begin(),vec.end());
_for(i,0,vec.size()){
int v=vec[i];
if(i!=vec.size()-1){
int v2=vec[i+1];
dp[v].erase(dp[v].find(*dp[v2].rbegin()+1));
}
}
_for(i,0,vec.size()){
mv1[i]=*dp[vec[i]].rbegin()+i;
mv2[i]=*dp[vec[i]].rbegin()+vec.size()-i-1;
}
st1.build(mv1,vec.size());
st2.build(mv2,vec.size());
enter(solve(0,vec.size()-1,0));
return 0;
}

```

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:%E7%BB%84%E9%98%9F%E8%AE%AD%E7%BB%83%E6%AF%94%E8%B5%9B%E8%AE%B0%E5%BD%95:contest13&rev=1628997333

Last update: 2021/08/15 11:15