

莫比乌斯反演

简介

莫比乌斯反演是数论中的重要内容. 对于一些函数 $f(n)$, 如果很难直接求出它的值, 而容易求出其倍数和或约数和 $g(n)$, 那么可以通过莫比乌斯反演简化运算, 求得 $f(n)$ 的值

开始学习莫比乌斯反演前, 我们需要一些前置知识: 积性函数、Dirichlet 卷积、莫比乌斯函数.

前置知识

引理 1

$$\begin{aligned} & \text{For all } a, b, c \in \mathbb{Z}, \left\lfloor \frac{a}{bc} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor}{c} \right\rfloor \end{aligned}$$

引理 2

$$\begin{aligned} & \text{For all } n \in \mathbb{N}, \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2n}} \right\rfloor \end{aligned}$$

$|V|$ 表示集合 V 的元素个数

数论分块

数论分块的过程大致如下: 考虑含有 $\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$ 的求和式子 (n 为常数)

对于任意一个 i ($i \leq n$), 我们需要找到一个最大的 j ($i \leq j \leq n$), 使得 $\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor$.

而 $j = \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$.

利用上述结论, 我们每次以 $[i, j]$ 为一块, 分块求和即可

积性函数

定义

若 $\gcd(x, y) = 1$ 且 $f(xy) = f(x)f(y)$, 则 $f(n)$ 为积性函数.

性质

若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为积性函数, 则以下函数也为积性函数: $h(x) = f(x^p)$, $h(x) = f^p(x)$, $h(x) = f(x)g(x)$, $h(x) = \sum_{d|x} f(d)g(\frac{x}{d})$

例子

单位函数: $\varepsilon(n) = [n=1]$

恒等函数: $\text{id}_k(n) = n^k$, $\text{id}_1(n)$ 通常简记为 $\text{id}(n)$

常数函数: $\chi(n) = 1$

除数函数: $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, $\sigma_0(n)$ 通常简记作 $d(n)$ 或 $\tau(n)$, $\sigma_1(n)$ 通常简记作 $\sigma(n)$

欧拉函数: $\varphi(n) = \sum_{i=1}^n [\gcd(i, n) = 1]$

莫比乌斯函数: $\mu(n) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{if } n=1 \\ 0 & \text{if } n \neq 1 \text{ and } \omega(n) \text{ is even} \\ (-1)^{\omega(n)} & \text{otherwise} \end{array} \right.$ 其中 $\omega(n)$ 表示 n 的本质不同质因子个数, 是一个积性函数

Dirichlet 卷积

定义

定义两个数论函数 f, g 的 Dirichlet 卷积为 $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$

性质

Dirichlet 卷积满足交换律和结合律

其中 ε 为 Dirichlet 卷积的单位元 (任何函数卷 ε 都为其本身)

例子

$\varepsilon = \mu * 1 \Rightarrow \varepsilon(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot 1 = \begin{cases} 1 & \text{if } n=1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
 $d(n) = \sum_{d|n} 1 \Rightarrow \sigma = id * 1 \Rightarrow \sigma(n) = \sum_{d|n} d$
 $\varphi = \mu * id \Rightarrow \varphi(n) = \sum_{d|n} d \cdot \mu(\frac{n}{d})$

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team



Permanent link:

https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:%E8%8E%AB%E6%AF%94%E4%B9%8C%E6%96%AF%E5%8F%8D%E6%BC%94_lgwza&rev=1593786879

Last update: 2020/07/03 22:34