

莫比乌斯反演

简介

莫比乌斯反演是数论中的重要内容. 对于一些函数 $f(n)$, 如果很难直接求出它的值, 而容易求出其倍数和或约数和 $g(n)$, 那么可以通过莫比乌斯反演简化运算, 求得 $f(n)$ 的值

开始学习莫比乌斯反演前, 我们需要一些前置知识: 积性函数, Dirichlet 卷积、莫比乌斯函数.

前置知识

引理 1

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, \left\lfloor \frac{a}{bc} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor}{c} \right\rfloor$$

引理 2

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \in \mathbb{N} \implies \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{d}} \right\rfloor \leq \sqrt{n}$$

$|V|$ 表示集合 V 的元素个数

数论分块

数论分块的过程大致如下: 考虑含有 $\sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$ 的求和式子 (n 为常数)

对于任意一个 i ($i \leq n$), 我们需要找到一个最大的 j ($i \leq j \leq n$), 使得 $\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor$.

而 $j = \left\lfloor \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} \right\rfloor$.

利用上述结论, 我们每次以 $[i, j]$ 为一块, 分块求和即可

积性函数

定义

若 $\gcd(x, y) = 1$ 且 $f(xy) = f(x)f(y)$, 则 $f(n)$ 为积性函数.

性质

若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为积性函数, 则以下函数也为积性函数: $h(x)=f(x^p) \parallel h(x)=f^p(x) \parallel h(x)=f(x)g(x) \parallel h(x)=\sum_{d|x} f(d)g(\frac{x}{d})$

例子

单位函数: $\varepsilon(n)=[n=1]$

恒等函数: $\text{id}_k(n)=n^k, \text{id}_1(n)$ 通常简记为 $\text{id}(n)$

常数函数: $1(n)=1$

除数函数: $\sigma_k(n)=\sum_{d|n} d^k, \sigma_0(n)$ 通常简记作 $d(n)$ 或 $\tau(n), \sigma_1(n)$ 通常简记作 $\sigma(n)$

欧拉函数: $\varphi(n)=\sum_{i=1}^n [\text{gcd}(i,n)=1]$

莫比乌斯函数: $\mu(n)=\begin{cases} 1 & n=1 \\ (-1)^{\omega(n)} & n \text{ 为 } n \text{ 个不同质因子的乘积} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ 其中 $\omega(n)$ 表示 n 的本质不同质因子个数, 是一个积性函数

Dirichlet 卷积

定义

定义两个数论函数 f, g 的 Dirichlet 卷积为 $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$

性质

Dirichlet 卷积满足交换律和结合律

其中 ε 为 Dirichlet 卷积的单位元 (任何函数卷 ε 都为其本身)

例子

$\varepsilon * \mu \rightarrow \varepsilon(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \parallel 1 * 1 \rightarrow d(n) = \sum_{d|n} 1 \parallel \text{id} * 1 \rightarrow \sigma(n) = \sum_{d|n} d \parallel \mu * \text{id} \rightarrow \varphi(n) = \sum_{d|n} d \cdot \mu(\frac{n}{d})$

莫比乌斯函数

定义

μ 为莫比乌斯函数, 定义为 $\mu(n)=\begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n \text{ 含有平方因子} \\ (-1)^k & k \text{ 为 } n \text{ 的本质不同质因子个数} \end{cases}$. 详细解释一下:

令 $n=\prod_{i=1}^k p_i^{c_i}$, 其中 p_i 为质因子, $c_i \geq 1$. 上述定义表示:

- $n=1$ 时, $\mu(n)=1$;
- 对于 $n \neq 1$ 时:
 - 当存在 $i \in [1, k]$, 使得 $c_i > 1$ 时, $\mu(n)=0$, 也就是说只要某个质因子出现的次数超过一次, $\mu(n)$ 就等于 0;
 - 当任意 $i \in [1, k]$, 都有 $c_i = 1$ 时, $\mu(n)=(-1)^k$, 也就是说每个质因子都仅仅只出现过一次时, 即 $n=\prod_{i=1}^k p_i$, $\{p_i\}_{i=1}^k$ 中各元素唯一时, $\mu(n)$ 等于 -1^k 的 k 次幂, 此处 k 指的便是仅仅只出现过一次的质因子的总个数.

性质

莫比乌斯函数不但是积性函数, 还有如下性质: $\sum_{d|n} \mu(d)=\begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$. 即 $\sum_{d|n} \mu(d)=\varepsilon(n)$, 即 $\mu * 1 = \varepsilon$. $\text{gcd}(i, j)=1 \iff \sum_{d|\text{gcd}(i, j)} \mu(d) = 1$

$$\varphi * 1 = \text{ID}$$

(ID 函数即 $f(x)=x$)

该式子两侧同时卷 μ 可得 $\varphi(n)=\sum_{d|n} d \cdot \mu(\frac{n}{d})$

莫比乌斯反演

公式

设 $f(n), g(n)$ 为两个数论函数

如果有 $f(n)=\sum_{d|n} g(d)$ 那么有 $g(n)=\sum_{d|n} \mu(d)f(\frac{n}{d})$

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:%E8%8E%AB%E6%AF%94%E4%B9%8C%E6%96%AF%E5%8F%8D%E6%BC%94_lgwza&rev=1593786952

Last update: 2020/07/03 22:35