

# 莫比乌斯反演

## 简介

莫比乌斯反演是数论中的重要内容. 对于一些函数  $f(n)$ , 如果很难直接求出它的值, 而容易求出其倍数和或约数和  $g(n)$ , 那么可以通过莫比乌斯反演简化运算, 求得  $f(n)$  的值

开始学习莫比乌斯反演前, 我们需要一些前置知识: 积性函数, Dirichlet 卷积、莫比乌斯函数.

## 前置知识

### 引理 1

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, \left\lfloor \left\lfloor \frac{a}{bc} \right\rfloor \right\rfloor = \left\lfloor \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \right\rfloor \left\lfloor \frac{c}{bc} \right\rfloor$$

### 引理 2

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\lfloor \left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \right\rfloor \right\rfloor \in \mathbb{N} \left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{2\sqrt{n}} \right\rfloor \right\rfloor$$

$|V|$  表示集合  $V$  的元素个数

## 数论分块

数论分块的过程大致如下: 考虑含有  $\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$  的求和式子 ( $n$  为常数)

对于任意一个  $i$  ( $i \leq n$ ), 我们需要找到一个最大的  $j$  ( $i \leq j \leq n$ ), 使得  $\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor$ .

而  $j = \left\lfloor \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} \right\rfloor$ .

利用上述结论, 我们每次以  $[i, j]$  为一块, 分块求和即可

## 积性函数

### 定义

若  $\gcd(x, y) = 1$  且  $f(xy) = f(x)f(y)$ , 则  $f(n)$  为积性函数.

## 性质

若  $f(x)$  和  $g(x)$  均为积性函数, 则以下函数也为积性函数:  $h(x)=f(x^p) \parallel h(x)=f^p(x) \parallel h(x)=f(x)g(x) \parallel h(x)=\sum_{d|x} f(d)g(\frac{x}{d})$

## 例子

单位函数:  $\varepsilon(n)=[n=1]$

恒等函数:  $\text{id}_k(n)=n^k, \text{id}_1(n)$  通常简记为  $\text{id}(n)$

常数函数:  $1(n)=1$

除数函数:  $\sigma_k(n)=\sum_{d|n} d^k, \sigma_0(n)$  通常简记作  $d(n)$  或  $\tau(n), \sigma_1(n)$  通常简记作  $\sigma(n)$

欧拉函数:  $\varphi(n)=\sum_{i=1}^n [\text{gcd}(i,n)=1]$

莫比乌斯函数:  $\mu(n)=\begin{cases} 1 & n=1 \\ (-1)^{\omega(n)} & n \text{ 为 } n > 1 \text{ 的无平方因子数} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$  其中  $\omega(n)$  表示  $n$  的本质不同质因子个数, 是一个积性函数

## Dirichlet 卷积

### 定义

定义两个数论函数  $f, g$  的 Dirichlet 卷积为  $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$

### 性质

Dirichlet 卷积满足交换律和结合律

其中  $\varepsilon$  为 Dirichlet 卷积的单位元 (任何函数卷  $\varepsilon$  都为其本身)

### 例子

$\varepsilon * \mu \rightarrow \varepsilon(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \parallel 1 * 1 \rightarrow d(n) = \sum_{d|n} 1 \parallel \text{id} * 1 \rightarrow \sigma(n) = \sum_{d|n} d \parallel \mu * \text{id} \rightarrow \varphi(n) = \sum_{d|n} d \cdot \mu(\frac{n}{d})$

## 莫比乌斯函数

### 定义

$\mu$  为莫比乌斯函数, 定义为  $\mu(n)=\begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n \text{ 含有平方因子} \\ (-1)^k & k \text{ 为 } n \text{ 的本质不同质因子个数} \end{cases}$ . 详细解释一下:

令  $n=\prod_{i=1}^k p_i^{c_i}$ , 其中  $p_i$  为质因子,  $c_i \geq 1$ . 上述定义表示:

- $n=1$  时,  $\mu(n)=1$ ;
- 对于  $n \neq 1$  时:
  - 当存在  $i \in [1, k]$ , 使得  $c_i > 1$  时,  $\mu(n)=0$ , 也就是说只要某个质因子出现的次数超过一次,  $\mu(n)$  就等于  $0$ ;
  - 当任意  $i \in [1, k]$ , 都有  $c_i = 1$  时,  $\mu(n)=(-1)^k$ , 也就是说每个质因子都仅仅只出现过一次时, 即  $n=\prod_{i=1}^k p_i$ ,  $\{p_i\}_{i=1}^k$  中各元素唯一时,  $\mu(n)$  等于  $-1$  的  $k$  次幂, 此处  $k$  指的便是仅仅只出现过一次的质因子的总个数.

### 性质

莫比乌斯函数不但是积性函数, 还有如下性质:  $\sum_{d|n} \mu(d)=\begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$ . 即  $\sum_{d|n} \mu(d)=\varepsilon(n)$ , 即  $\mu * 1 = \varepsilon$ .  $\text{gcd}(i, j)=1 \iff \sum_{d|\text{gcd}(i, j)} \mu(d) = 1$

$$\varphi * 1 = \text{ID}$$

(ID 函数即  $f(x)=x$ )

该式子两侧同时卷  $\mu$  可得  $\varphi(n)=\sum_{d|n} d \cdot \mu(\frac{n}{d})$

## 莫比乌斯反演

### 公式

设  $f(n), g(n)$  为两个数论函数

如果有  $f(n)=\sum_{d|n} g(d)$  那么有  $g(n)=\sum_{d|n} \mu(d)f(\frac{n}{d})$

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:%E8%8E%AB%E6%AF%94%E4%B9%8C%E6%96%AF%E5%8F%8D%E6%BC%94\\_lgwza&rev=1593786993](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:%E8%8E%AB%E6%AF%94%E4%B9%8C%E6%96%AF%E5%8F%8D%E6%BC%94_lgwza&rev=1593786993)

Last update: 2020/07/03 22:36