万能欧几里得算法

算法简介

一种 $O(\log n)$ 计算形如 $f(n)=\sum_{i=1}^n \lfloor \frac {ai+b}c \rfloor$ 的函数的算法。

算法原理

不妨考虑待计算函数就是 $f(n)=\sum_{i=1}^n \lfloor \frac {ai+b}c\rfloor$同时假设 $b\lt c$考虑按如下过程计算 $f(n)$

考虑在 $(0,n]$ 范围内逐渐增加 x当 $y=\frac {ax+b}c$ 恰好等于某个整数时 $y\gets y+1$称为 U 操作。

当 x 恰好等于某个整数时有 $\text{ans}\gets \text{ans}+y$称为 R 操作。如果遇到整点，先进行 U 操作再进行 R 操作。

于是计算 $f(n)$ 等价于处理由 $y=\frac {ax+b}c(x\in (0,n])$ 产生的操作序列 S

先考虑如何得到这个操作序列，设 $g(a,b,c,n,U,R)$ 表示由 $y=\frac {ax+b}c(x\in (0,n])$ 产生的操作序列 S

定义字符串幂操作 $S^k=S^{k-1}S$

如果 $a\ge c$显然 R 操作前面至少有 $\lfloor \frac ac\rfloor$ 个 U 操作。将这 $\lfloor \frac ac\rfloor$ 个 U 操作和一个 R 操作视为一个整体，于是有

$$ g(a,b,c,n,U,R)=g(a\bmod c,b,c,n,U,U^{\lfloor \frac ac\rfloor}R) $$

如果 $b\ge c$显然有

$$ g(a,b,c,n,U,R)=U^{\lfloor \frac bc\rfloor}g(a,b\bmod c,c,n,U,R) $$

最后，如果 $c\gt \max (a,b)$则考虑构造 $y=\frac {ax+b}c$ 按 $y=x$ 做对称变换得到的直线 $y=\frac {cx-b}a$

不难发现$y=\frac {cx-b}a$ 产生的序列和 $y=\frac{ax+b}c$ 产生的序列大致是互补的，即 U/R 互补。

但要处理遇到整点的情况，此时两条直线都是先 U 再 R 不满足互补关系，考虑将 $y=\frac {cx-b}a$ 整体向下偏移得到 $y=\frac {cx-b-1}a$

这样原先在 $y=\frac {cx-b}a$ 先 U 再 R 的整点等价于 $y=\frac {cx-b-1}a$ 先 R 在 U于是整点也满足了互补性质。

但偏移也导致 $y=\frac {cx-b-1}a$ 的边界发生了变化，考虑暴力处理边界，设 $m=\frac {an+b}c$于是有

$$ g(a,b,c,n,U,R)=R^{\lfloor \cfrac{c-b-1}{a}\rfloor}Ug(c,(c-b-1)\bmod a,a,m-1,R,U)R^{n-\lfloor

\cfrac{cm-b-1}{a}\rfloor} $$

边界条件为 $m=0$此时说明只有 R 操作，于是 $g(a,b,c,n,U,R)=R^n$

假如不考虑字符串拼接等操作的复杂度，上述式子可以 $O(\log n)$ 计算。

接下来考虑如何通过得到的字符串即操作序列来计算答案。事实上可以在拼接字符串时维护答案。

设 $h(S)$ 表示字符串 S 对应的答案，两个串分别为 $S1,S2$$dx=\text{cntR}(S1),dy=\text{cntU}(S1),n=\text{cntR}(S2)$

$$ h(S1S2)=h(S1)+\sum_{i=1}^n (\lfloor \frac {ai+b}c\rfloor+dy)=h(S1)+\sum_{i=1}^n (\lfloor \frac {ai+b}c\rfloor)+n\times dy=h(S1)+h(S2)+n\times dy $$

至于 S^k 可以利用快速幂计算。整体操作复杂度为 $T(a,c)=T(c\bmod a,a)+O(\log \frac ca)$

$T(a,c)$ 产生的 $O(\log c)-O(\log a)$ 可以和随后 $T(c\bmod a,a)$ 产生的 $O(\log a)-O(\log (c\bmod a))$ 部分抵消。

最终 $T(a,c)=O(\log c)-O(\log\gcd (a,c))\sim O(\log c)$

算法例题

例题一

洛谷p5170

题意

求

$$ f(n)=\sum_{i=0}^n \lfloor \frac {ai+b}c\rfloor\\ g(n)=\sum_{i=0}^n (\lfloor \frac {ai+b}c\rfloor)^2\\ h(n)=\sum_{i=0}^n i\lfloor \frac {ai+b}c\rfloor $$

题解

设 F,G,H 分别表示序列 S 对应 f,g,h 的答案，于是有

$$ \begin{equation}\begin{split} F(S1S2)&=F(S1)+\sum_{i=1}^n (\lfloor \frac {ai+b}c\rfloor+dy)=F(S1)+F(S2)+n\times dy\\ G(S1S2)&=G(S1)+\sum_{i=1}^n (\lfloor \frac {ai+b}c\rfloor+dy)^2 \\ &=G(S1)+\sum_{i=1}^n (\lfloor \frac {ai+b}c\rfloor)^2+ 2dy\sum_{i=1}^n \lfloor \frac {ai+b}c\rfloor+dy+\sum_{i=1}^n (dy)^2\\ &=G(S1)+G(S2)+2dyF(S2)+n\times (dy)^2\\ H(S1S2)&=H(S1)+\sum_{i=1}^n (i+dx)(\lfloor \frac {ai+b}c\rfloor+dy) \\ &=H(S1)+\sum_{i=1}^n \left(i(\lfloor \frac {ai+b}c\rfloor)+i\times dy+dx(\lfloor \frac {ai+b}c\rfloor)+dxdy\right)\\ &=H(S1)+H(S2)+\frac {n(n+1)}2dy+dxF(S1)+n\times dxdy \end{split}\end{equation} $$

From:
https://wiki.cvbbacm.com/ - **CVBB ACM Team**

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E4%B8%87%E8%83%BD%E6%AC%A7%E5%87%A0%E9%87%8C%E5%BE%97%E7%AE%97%E6%B3%95&rev=1629387849

Last update: **2021/08/19 23:44**