

# 二项式反演

## 算法简介

一种特殊反演，主要应用于组合计数。

## 算法思想

$$\sum_{i=0}^m \binom{n}{i} g(i) \iff g(n) = \sum_{i=0}^m (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(i)$$

$$\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} g(i) \iff g(n) = \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} f(i)$$

## 算法例题

### 题意

一个有  $n$  个元素的集合，现在要从他的所有子集中取出至少一个集合，使得所选子集的交集的元素个数为  $k$ 。求方案数。

### 题解

定义  $f(k)$  表示所有钦定  $k$  个元素属于交集(其余元素任意)的方案数之和，于是有  $f(k) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} 2^{n-k}$

定义  $g(k)$  表示恰好有  $k$  个元素属于交集的方案数，对于  $f(k)$  的每个方案  $i$ ，如果  $i \geq k$ ，则被计算  $\binom{i}{k}$  次，于是  $f(k) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} g(i)$

根据二项式反演，有  $g(k) = \sum_{i=k}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(i)$  时间复杂度  $O(n)$

## 算法练习

### 习题一

[洛谷p5505](#)

### 题意

有  $n$  个人和  $m$  种物品，第  $i$  种物品有  $a_i$  个，同种物品之间没有区别。现在要将这些物品分给这些人，使得每个人至少分到一个物品，求方案数。

## 题解

定义  $f(k)$  表示所有钦定  $k$  个人没有分到物品(其余人任意)的方案数之和，于是有  $f(k)=\sum_{i=1}^k \binom{n}{n-k+i-1}$

定义  $g(k)$  表示恰好有  $k$  个人没有分到物品的方案数，对于  $f(k)$  的每个方案  $\binom{n}{i}$  被计算  $\binom{i}{k}$  次，于是  $f(k)=\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} f(i)$  题目所求即为  $g(0)$  时间复杂度  $O(nm)$

根据二项式反演，有  $g(k)=\sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \binom{i}{k} f(i)$  题目所求即为  $g(0)$  时间复杂度  $O(nm)$

```
const int MAXN=2005,Mod=1e9+7;
int a[MAXN],C[MAXN][MAXN];
int main()
{
    int n=read_int(),m=read_int();
    for(i,0,m)a[i]=read_int();
    C[0][0]=1;
    for(i,1,MAXN){
        C[i][0]=1;
        rep(j,1,i)
            C[i][j]=(C[i-1][j-1]+C[i-1][j])%Mod;
    }
    int ans=0;
    rep(i,0,n){
        int t=C[n][i];
        for(j,0,m)t=1LL*t*C[n-i+a[j]-1][n-i-1]%Mod;
        if(i&1)ans=(ans-t)%Mod;
        else ans=(ans+t)%Mod;
    }
    enter((ans+Mod)%Mod);
    return 0;
}
```

## 习题二

洛谷p4859

### 题意

### 题解

From:  
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team



Permanent link:  
[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:jxm2001:%E4%BA%8C%E9%A1%B9%E5%BC%8F%E5%8F%8D%E6%BC%94&rev=1597975914](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E4%BA%8C%E9%A1%B9%E5%BC%8F%E5%8F%8D%E6%BC%94&rev=1597975914)

Last update: 2020/08/21 10:11