

# 动态规划 1

## 数位DP

### 算法简介

一般用于处理形如区间  $[l,r]$  中满足条件的数有几个之类问题。

### 算法思想

首先考虑将区间  $[l,r]$  拆分成  $[0,r]-[0,l]$

考虑记忆化搜索，一般搜索函数为  $f(pos,s,eq,zero)$

其中  $pos$  表示当前搜索位置， $s$  表示前缀状态， $eq$  表示前缀是否与查询上界相等， $zero$  表示是否有前导零。

### 算法练习

#### 习题一

[洛谷p2657](#)

#### 题意

询问区间  $[l,r]$  中满足相邻数位之差至少为  $2$  的数的个数。

#### 题解

```
int a[10],dp[10][10];
int dfs(int pos,int pre,bool eq,bool zero){
    if(!pos)return 1;
    if(!eq&&~dp[pos][pre])return dp[pos][pre];
    int ans=0,v=eq?a[pos]:9;
    _rep(i,0,v){
        if(!zero&&abs(i-pre)<2)
            continue;
        ans+=dfs(pos-1,i,eq&&i==a[pos],zero&&i==0);
    }
    if(!eq&&!zero)dp[pos][pre]=ans;
    return ans;
}
int solve(int n){
```

```
int len=0;
mem(dp, -1);
while(n){
    a[++len]=n%10;
    n/=10;
}
return dfs(len, 0, true, true);
}
int main()
{
    int a=read_int(), b=read_int();
    printf("%d", solve(b) - solve(a-1));
    return 0;
}
```

## 习题二

[洛谷p2602](#)

### 题意

询问区间  $[l, r]$  所有整数中  $0 \sim 9$  分别出现的次数。

### 题解

依次计算  $0 \sim 9$  出现次数。每次把搜索函数中的  $s$  当成当前前缀的贡献即可。

```
const int MAXL=15;
LL a[MAXL], dp[MAXL][MAXL];
int goal;
LL dfs(int pos, int pre, bool eq, bool zero){
    if(!pos) return pre;
    if(!eq && ~dp[pos][pre]) return dp[pos][pre];
    int v=eq?a[pos]:9; LL ans=0;
    _rep(i, 0, v){
        if(zero && i==0)
            ans+=dfs(pos-1, pre, eq && i==a[pos], true);
        else
            ans+=dfs(pos-1, pre+(i==goal), eq && i==a[pos], false);
    }
    if(!eq && !zero) dp[pos][pre]=ans;
    return ans;
}
LL solve(LL n){
    int len=0;
```

```

    mem(dp, -1);
    while(n){
        a[++len]=n%10;
        n/=10;
    }
    return dfs(len, 0, true, true);
}
int main()
{
    LL a=read_LL(), b=read_LL();
    _rep(i, 0, 9){
        goal=i;
        printf("%lld ", solve(b)-solve(a-1));
    }
    return 0;
}

```

### 习题三

#### 洛谷p4127

#### 题意

给出两个数  $a, b$  求出  $[a, b]$  中各位数字之和能整除原数的数的个数。

#### 题解

发现在各位数字之和不确定情况下难以判定最后结果是否被各位数字之和相当困难。

于是考虑枚举所有可能的各位数字之和  $\text{Mod}$  于是  $\text{dp}$  过程中维护一下前面数位之和以及前缀模  $\text{Mod}$  的结果。

于是每次可能状态共有  $18 \ast (18 \ast 9)^2$  个，最坏计算次数  $18 \ast (18 \ast 9)^3 \approx 8 \times 10^7$

当然每次合法状态数不可能达到上界。另外可以考虑在  $\text{dp}$  过程中适当剪枝。

```

const int MAXL=20, MAXV=180;
LL a[MAXL], dp[MAXL][MAXV][MAXV];
int Mod;
LL dfs(int pos, int s, int mod, bool eq){
    if(s>Mod || s+pos*9<Mod) return 0;
    if(!pos) return mod==0;
    if(!eq && ~dp[pos][s][mod]) return dp[pos][s][mod];
    int v=eq?a[pos]:9; LL ans=0;
    _rep(i, 0, v)
        ans+=dfs(pos-1, s+i, (mod*10+i)%Mod, eq&& i==a[pos]);
}

```

```
    if(!eq)dp[pos][s][mod]=ans;
    return ans;
}
LL solve(LL n){
    int len=0;
    while(n){
        a[++len]=n%10;
        n/=10;
    }
    LL ans=0;
    _rep(i,1,len*9){
        mem(dp,-1);
        Mod=i;
        ans+=dfs(len,0,0,true);
    }
    return ans;
}
int main()
{
    LL a=read_LL(),b=read_LL();
    printf("%lld",solve(b)-solve(a-1));
    return 0;
}
```

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:jxm2001:%E5%8A%A8%E6%80%81%E8%A7%84%E5%88%92\\_1&rev=1596118471](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E5%8A%A8%E6%80%81%E8%A7%84%E5%88%92_1&rev=1596118471)

Last update: 2020/07/30 22:14