

动态规划 2

二进制优化

题意

洛谷p1776

给定一个容量为 m 的背包和 n 种物品。每种物品价值为 v_i 重量为 w_i 数量为 c_i 求最多可以得到的价值。

题解

暴力方法为将每种物品转化为 c_i 个独立物品考虑，然后就是一个 01 背包问题。

不难发现任意一个不超过 c_i 的正整数一定用 $1, 2, 4, \dots, 2^{n-1}, (c_i - 2^{n-1} + 1)$ 表示。

于是可以将每种物品拆成 $1, 2, 4, \dots, 2^{n-1}, (c_i - 2^{n-1} + 1)$ 个物品构成的包考虑。

物品总数优化为 $O(\sum_{i=1}^n \log c_i)$ 总时间复杂度为 $O(m \sum_{i=1}^n \log c_i)$

```
const int MAXM=4e4+5,MAXC=2005;
int dp[MAXM],v[MAXC],w[MAXC];
int main()
{
    int n=read_int(),m=read_int(),cnt=0;
    _for(i,0,n){
        int a=read_int(),b=read_int(),c=read_int();
        for(int j=1;j<c;j<=1){
            v[cnt]=j*a,w[cnt++]=j*b;
            c-=j;
        }
        v[cnt]=c*a,w[cnt++]=c*b;
    }
    _for(i,0,cnt)
        for(int j=m;j>=w[i];j--)
            dp[j]=max(dp[j],dp[j-w[i]]+v[i]);
    enter(dp[m]);
    return 0;
}
```

单调队列优化

习题一

CF372C

题意

一个城镇有 n 个区域，从左到右 i 编号为 i 每个区域之间距离 1 个单位距离。

节日中有 m 个烟火要放，给定放的地点 a_i 时间 t_i 如果你当时在区域 x 那么你可以获得 $b_i - |a_i - x|$ 的开心值。

你每个单位时间可以移动不超过 d 个单位距离。你的初始位置是任意的(初始时刻为 1)，求你通过移动能获取到的最大的开心值。

题意

设 $dp(i, j)$ 表示在 t_i 时刻处于位置 j 能得到的最大快乐值。于是有

$$dp(i, j) = \max_{k \in [j-d, j+d]} \{ dp(i-1, k) + b_i - |a_i - j| \}$$

单调队列维护即可。时间复杂度 $O(nm)$

```
const int MAXN=15e4+5;
const LL Inf=1e18;
LL dp[2][MAXN];
int que[MAXN];
int main()
{
    int n=read_int(),m=read_int(),d=read_int(),pos=0,last=1;
    while(m--){
        int a=read_int(),b=read_int(),t=read_int()-last;
        pos=!pos;
        for(int i=1,rpos=1,head=0,tail=1;i<=n;i++){
            while(head<=tail&&que[tail]<i-1LL*t*d)tail++;
            while(rpos<=n&&rpos<=i+1LL*t*d){
                while(head<=tail&&dp[!pos][que[head]]<=dp[pos][rpos])head--;
                que[++head]=rpos++;
            }
            dp[pos][i]=dp[!pos][que[tail]]+b-abs(a-i);
        }
        last+=t;
    }
    LL ans=-Inf;
    _rep(i,1,n)
        ans=max(ans,dp[pos][i]);
    enter(ans);
}
```

```

    return 0;
}

```

习题二

题意

洛谷p1776

给定一个容量为 m 的背包和 n 种物品。每种物品价值为 v_i 重量为 w_i 数量为 c_i 求最多可以得到的价值。

题解

考虑滚动背包，有 $dp_i = \max_{k \leq c} (dp_{i-kw} + kv)$ 设 $i = jw + r$ 有

$$dp_{jw+r} = \max_{k \leq c} (dp_{jw+r-kw} + kv) = \max_{k \leq c} (dp_{(j-k)w+r} - (j-k)v) + jv$$

枚举余数 r 对每个余数 r 维护 $dp_{aw+r} - av$ 的单调队列即可。时间复杂度 $O(nm)$

```

const int MAXM=4e4+5,MAXC=2005;
int dp[MAXM];
pair<int,int> que[MAXM];
int main()
{
    int n=read_int(),m=read_int();
    _for(i,0,n){
        int v=read_int(),w=read_int(),c=read_int();
        _for(j,0,w){
            if(m<j)continue;
            int pos1=(m-j)/w,pos2=pos1,head=0,tail=1;
            for(int k=0;pos2>=0&& k<=c;pos2--,k++){
                int t=dp[pos2*w+j]-pos2*v;
                while(head>=tail&& que[head].second<=t) head--;
                que[++head]=make_pair(pos2,t);
            }
            for(;pos1>=0;pos1--){
                while(que[tail].first>pos1) tail++;
                dp[pos1*w+j]=max(dp[pos1*w+j],que[tail].second+pos1*v);
                if(pos2<0)continue;
                int t=dp[pos2*w+j]-pos2*v;
                while(head>=tail&& que[head].second<=t) head--;
                que[++head]=make_pair(pos2,t);
                pos2--;
            }
        }
    }
}

```

```
enter(dp[m]);  
return 0;  
}
```

习题三

洛谷p2254

题意

给定一个 $n \times m$ 的图，图中有若干障碍物。接下来给定一个物体的初始位置和 k 个时间段。

每个时间段内物体将按每个单位时间一格的速率向给定方向运动。

每个单位时间都可以选择让物体在该单位时间停止运动。问在物体移动过程中不超出图的边界同时不撞上障碍物的前提下物体可以运动的最大路程。

题解

设 $\text{dp}(i, x, y)$ 表示物体在前 i 个时间段最终运动到 (x, y) 能运动的最大路程。以向 x 增大的方向运动为例，有状态转移方程

$$\text{dp}(i, x, y) = \max_{x-dt \leq j \leq x} (\text{dp}(i-1, j, y) + x - j) = \max_{x-dt \leq j \leq x} (\text{dp}(i-1, j, y) - j) + x$$

其中 dt 表示该时间段的长度。发现可以单调队列维护，总时间复杂度 $O(nmk)$

```
const int MAXN=205;  
int n,m,dp[MAXN][MAXN],pos;  
pair<int,int> que[MAXN];  
char mp[MAXN][MAXN];  
void cal(int x,int y,int dx,int dy,int dt){  
    for(int i=1,head=0,tail=1;1<=x&&1<=y&&y<=m;i++,x+=dx,y+=dy){  
        if(mp[x][y]=='x'){  
            head=0,tail=1;  
            continue;  
        }  
        while(head>=tail&&que[tail].first<i-dt)tail++;  
        int cur=dp[x][y]-i;  
        while(head>=tail&&que[head].second<=cur)head--;  
        que[++head]=make_pair(i,cur);  
        dp[x][y]=que[tail].second+i;  
    }  
}  
int main()  
{
```

```

n=read_int(),m=read_int();
int x=read_int(),y=read_int(),t=read_int();
_rep(i,1,n)
scanf("%s",mp[i]+1);
mem(dp,0xf0);
dp[x][y]=0;
while(t--){
    int l=read_int(),r=read_int(),dr=read_int();
    if(dr==1)_rep(i,1,m)cal(n,i,-1,0,r-l+1);
    else if(dr==2)_rep(i,1,m)cal(1,i,1,0,r-l+1);
    else if(dr==3)_rep(i,1,n)cal(i,m,0,-1,r-l+1);
    else _rep(i,1,n)cal(i,1,0,1,r-l+1);
}
int ans=0;
_rep(i,1,n)_rep(j,1,m)ans=max(ans,dp[i][j]);
enter(ans);
return 0;
}

```

斜率优化

习题一

[洛谷p3195](#)

题意

给定序列 c_i 和常数 L 已知一个区间 $[l, r]$ 的权值为 $(\sum_{i=l}^r c_i + r - l - 1 - L)^2$ 现要求将 $[1, n]$ 划分为若干连续区间，使得权值和最小。

题解

设 dp_i 表示区间 $[1, i]$ 的最小答案，设 $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$ 可以得到状态转移方程

$$\text{dp}_i = \min(\text{dp}_j + (s_i + i - s_j - j - L - 1)^2)$$

考虑将变量 i, j 分离，设 $a_i = s_i + i, b_i = s_i + i + L + 1$ 有

$$\text{dp}_i = \text{dp}_j + (a_i - b_j)^2 = a_i^2 + \text{dp}_j + b_j^2 - 2a_i b_j$$

设 $y = \text{dp}_j + b_j^2, x = 2b_j$ 于是有

$$\text{dp}_i - a_i^2 = y - a_i x$$

于是维护凸包即可，另外发现 a_i 和 x 递增，于是可以单调队列维护凸包，时间复杂度 $O(n)$ 注意最开始需加入 (a_0, b_0)

```
const int MAXN=5e4+5;
LL dp[MAXN],a[MAXN],b[MAXN],s[MAXN];
int q[MAXN];
double slope(int i,int j){return (double)(dp[i]+b[i]*b[i]-dp[j]-
b[j]*b[j])/(2*b[i]-2*b[j]);}
int main()
{
    int n=read_int(),L=read_int();
    b[0]=L+1;
    _rep(i,1,n){
        s[i]=s[i-1]+read_int();
        a[i]=s[i]+i;
        b[i]=a[i]+L+1;
    }
    int head=0,tail=-1;
    q[++tail]=0;
    _rep(i,1,n){
        while(head<tail&&slope(q[head],q[head+1])<a[i])head++;
        dp[i]=dp[q[head]]+(a[i]-b[q[head]])*(a[i]-b[q[head]]);
        while(head<tail&&slope(q[tail],i)<slope(q[tail-1],q[tail]))tail--;
        q[++tail]=i;
    }
    enter(dp[n]);
    return 0;
}
```

习题二

洛谷p4072

题意

给定 n 个数，定义一个区间的权值为该区间所有数的权值和。现要求将其划分为 m 个区间，使得区间权值的方差最小。

题解

考虑方差等于平方的平均值减去平均值的平方。平均值的平方为定值，现在考虑最小化平方和。

设 $\text{dp}(k,i)$ 表示将前 i 个数划分为 k 个区间的答案，于是有状态转移方程

$$\text{dp}(k,i)=\min(\text{dp}(k-1,j)+(s_i-s_j)^2)$$

移项得

$$\text{dp}(k,i)-s_i^2=\text{dp}(k-1,j)+s_j^2-2s_js_i$$

令 $x=2s_j, y=\text{dp}(k-1, j)+s_j^2$ 暴力 m 次斜率优化即可，时间复杂度 $O(nm)$ 注意边界条件为 $\text{dp}(1, i)=s_i^2$

```
const int MAXN=5e4+5;
int dp[2][MAXN], s[MAXN], q[MAXN], pos;
double slope(int i, int j){return (double)(dp[!pos][i]+s[i]*s[i]-dp[!pos][j]-s[j]*s[j])/(2*s[i]-2*s[j]);}
int main()
{
    int n=read_int(), m=read_int();
    pos=0;
    _rep(i, 1, n)
        s[i]=s[i-1]+read_int(), dp[pos][i]=s[i]*s[i];
    _for(k, 1, m){
        pos=!pos;
        int head=0, tail=-1;
        q[++tail]=0;
        _rep(i, 1, n){
            while(head<tail&& slope(q[head], q[head+1])<s[i]) head++;
            dp[pos][i]=dp[!pos][q[head]]+(s[i]-s[q[head]])*(s[i]-s[q[head]]);
            while(head<tail&& slope(q[tail], i)< slope(q[tail-1], q[tail])) tail--;
            q[++tail]=i;
        }
    }
    enter(m*dp[pos][n]-s[n]*s[n]);
    return 0;
}
```

习题三

CF311B

题意

给定一条链，链上有 n 个点，编号相邻两点距离为 D_i 接下来给定 m 只猫，每只猫位于 H_i 号点，且在第 T_i 秒开始等待。

接下来有 p 个人，每个人速度为 1 且可以从任意时刻出发且从 1 号点不停止地走到 n 号点并带走所有已经开始等待的猫。

问所有猫等待时间的最小可能值。

题解

对每条猫，计算出使得它等待时间为 0 的出发时间 t_i 将 t_i 从小到大排序。

将序列 t 划分为 p 个区间，每个区间派一个人，显然这个人必须在该区间 t 的最大值的时刻出发。

设 $dp(i, j)$ 表示派 i 个人接前 j 只猫需要花费的最小时间 $s_n = \sum t_i$ 于是有状态转移方程

$$dp(i, j) = \min_{k \leq j} \left(dp(i-1, k) + \sum_{x=k+1}^j (t_j - t_x) \right) = \min_{k \leq j} \left(dp(i-1, k) + (j-k)t_j + s_j - s_k \right) = \min_{k \leq j} \left(dp(i-1, k) - s_k - t_jk \right) + jt_j + s_j$$

时间复杂度 $O(mp)$

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E5%8A%A8%E6%80%81%E8%A7%84%E5%88%92_2

Last update: 2021/02/11 18:58