

# 动态规划 4

## 四边形不等式优化

### 定义

区间包含单调性  $\forall l_1 \le l_2 \le r_1 \le r_2 \to f(l_2, r_1) \le f(l_1, r_2)$

四边形不等式  $\forall l_1 \le l_2 \le r_1 \le r_2 \to f(l_1, r_1) + f(l_2, r_2) \le f(l_2, r_1) + f(l_1, r_2)$

### 类型一

$$f_{l,r} = \min_{k=l}^{r-1} (f_{l,k} + f_{k+1,r}) + w(l,r)$$

### 性质一

若  $w(l,r)$  满足区间包含单调性和四边形不等式，则  $f(l,r)$  满足四边形不等式。

### 性质二

记  $g(l,r)$  为最小最优决策点，即  $f_{l,g(l,r)} + f_{g(l,r)+1,r} = \min_{k=l}^{r-1} (f_{l,k} + f_{k+1,r})$

若  $f(l,r)$  满足四边形不等式，则  $g(l,r-1) \le g(l,r) \le g(l+1,r)$

于是状态转移时顺便维护  $g(l,r)$  总时间复杂度  $\sum_{l=1}^n \sum_{r=l+1}^n g(l+1,r) - g(l,r-1) = \sum_{i=1}^n g(i,n) - g(1,i) \le n^2$

### 例题

[洛谷p1880](#)

### 题意

给定一个环，环上有  $n$  堆石头，每次可以合并两堆相邻的石头，费用为两堆石头的数量和，求将所有石头合并到一堆的最小和最大费用。

### 题解

首先把环倍增成两倍长的链。最小费用状态转移同类型一，易知  $w$  满足区间包含单调性和四边形不等式。

最大费用考虑贪心，每次都是操作上一次合并的石头堆和与其相邻的石头堆，有  $f_{l,r} = \max(f_{l,r-1} + f_{l+1,r}) + w(l,r)$



```
const int MAXN=205,Inf=1e8;
int dp1[MAXN][MAXN],dp2[MAXN][MAXN],g[MAXN][MAXN],s[MAXN],a[MAXN];
int main()
{
    int n=read_int();
    _rep(i,1,n)a[i]=a[i+n]=read_int();
    _rep(i,1,n*2){
        s[i]=s[i-1]+a[i];
        g[i][i]=i;
    }
    _rep(i,1,2*n)_rep(j,i+1,2*n)dp1[i][j]=Inf;
    for(int i=n*2-1;i;i--)_rep(j,i+1,n*2){
        _rep(k,g[i][j-1],g[i+1][j]){
            if(dp1[i][k]+dp1[k+1][j]+s[j]-s[i-1]<dp1[i][j]){
                dp1[i][j]=dp1[i][k]+dp1[k+1][j]+s[j]-s[i-1];
                g[i][j]=k;
            }
        }
        dp2[i][j]=max(dp2[i+1][j],dp2[i][j-1])+s[j]-s[i-1];
    }
    int ans1=Inf,ans2=0;
    _rep(i,1,n){
        ans1=min(ans1,dp1[i][i+n-1]);
        ans2=max(ans2,dp2[i][i+n-1]);
    }
    enter(ans1);
    enter(ans2);
    return 0;
}
```

## 类型二

$$f_r = \min_{l=1}^{r-1} (f_l + w(l,r))$$

### 性质

若  $w(l,r)$  满足四边形不等式，则  $f$  具有决策单调性。记  $g(i)$  为最小最优决策点，则  $g(i) \leq g(i+1)$

考虑单调队列二分，维护每个元素的原始位置  $p$  和负责的优决策区间  $[l,r]$

每次新加入一个点  $s$  如果该点对序列末尾  $n$  的决策不如队列末尾的点，则无视该点。

否则和队列末尾的点比较在  $l_{\text{tail}}$  位置的决策，如果  $s$  更优则删去末尾的点，不断操作直到  $s$  不再更优。

最后  $s$  和队列末尾点的最优决策分界点一定位于区间  $[l_{\text{tail}}, r_{\text{tail}}]$  二分查找即可。时间复杂度  $O(n \log n)$

## 例题

### 洛谷p3195

#### 题意

给定序列  $c$  和常数  $L$ 。已知一个区间  $[l,r]$  的权值为  $(\sum_{i=l}^r c_i + r - l - L)^2$ 。现要求将  $[1,n]$  划分为若干连续区间，使得权值和最小。

#### 题解

设  $\text{dp}_i$  表示区间  $[1,i]$  的最小答案，设  $s_n = \sum_{i=1}^n a_n$ 。可以得到状态转移方程

$$\text{dp}_i = \min(\text{dp}_j + (s_i + i - s_j - L - 1)^2)$$

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:jxm2001:%E5%8A%A8%E6%80%81%E8%A7%84%E5%88%92\\_4&rev=1619618578](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E5%8A%A8%E6%80%81%E8%A7%84%E5%88%92_4&rev=1619618578)

Last update: 2021/04/28 22:02