

# 动态规划 4

## 四边形不等式优化

### 定义

区间包含单调性  $\forall l_1 \le l_2 \le r_1 \le r_2 \to f(l_2, r_1) \le f(l_1, r_2)$

四边形不等式  $\forall l_1 \le l_2 \le r_1 \le r_2 \to f(l_1, r_1) + f(l_2, r_2) \le f(l_2, r_1) + f(l_1, r_2)$

### 类型一

$$f_{l,r} = \min_{k=l}^{r-1} (f_{l,k} + f_{k+1,r}) + w(l,r)$$

### 性质一

若  $w(l,r)$  满足区间包含单调性和四边形不等式，则  $f(l,r)$  满足四边形不等式。

### 性质二

记  $g(l,r)$  为最小最优决策点，即  $f_{l,g(l,r)} + f_{g(l,r)+1,r} = \min_{k=l}^{r-1} (f_{l,k} + f_{k+1,r})$

若  $f(l,r)$  满足四边形不等式，则  $g(l,r-1) \le g(l,r) \le g(l+1,r)$

于是状态转移时顺便维护  $g(l,r)$  总时间复杂度  $\sum_{l=1}^n \sum_{r=l+1}^n g(l+1,r) - g(l,r-1) = \sum_{i=1}^n g(i,n) - g(1,i) \le n^2$

### 例题

[洛谷p1880](#)

#### 题意

给定一个环，环上有  $n$  堆石头，每次可以合并两堆相邻的石头，费用为两堆石头的数量和，求将所有石头合并到一堆的最小和最大费用。

#### 题解

首先把环倍增成两倍长的链。最小费用状态转移同类型一，易知  $w$  满足区间包含单调性和四边形不等式。

最大费用考虑贪心，每次都是操作上一次合并的石头堆和与其相邻的石头堆，有  $f_{l,r} = \max(f_{l,r-1} + f_{l+1,r}) + w(l,r)$



```
const int MAXN=205,Inf=1e8;
int dp1[MAXN][MAXN],dp2[MAXN][MAXN],g[MAXN][MAXN],s[MAXN],a[MAXN];
int main()
{
    int n=read_int();
    _rep(i,1,n)a[i]=a[i+n]=read_int();
    _rep(i,1,n*2){
        s[i]=s[i-1]+a[i];
        g[i][i]=i;
    }
    _rep(i,1,2*n)_rep(j,i+1,2*n)dp1[i][j]=Inf;
    for(int i=n*2-1;i;i--)_rep(j,i+1,n*2){
        _rep(k,g[i][j-1],g[i+1][j]){
            if(dp1[i][k]+dp1[k+1][j]+s[j]-s[i-1]<dp1[i][j]){
                dp1[i][j]=dp1[i][k]+dp1[k+1][j]+s[j]-s[i-1];
                g[i][j]=k;
            }
        }
        dp2[i][j]=max(dp2[i+1][j],dp2[i][j-1])+s[j]-s[i-1];
    }
    int ans1=Inf,ans2=0;
    _rep(i,1,n){
        ans1=min(ans1,dp1[i][i+n-1]);
        ans2=max(ans2,dp2[i][i+n-1]);
    }
    enter(ans1);
    enter(ans2);
    return 0;
}
```

## 类型二

$$f_{i,j} = \min_{k=1}^j (f_{i-1,k} + w(k,r))$$

### 性质

若  $w(l,r)$  满足四边形不等式，记  $g(i,j)$  为最小最优决策点，则  $g(i,j) \leq g(i,j+1)$

考虑  $n$  次分治法，第  $i$  次分治法计算  $f_{i,1 \sim m}$  分治过程维护最小最优决策点的上下界，时间复杂度  $O(nm \log m)$

```
int dp[MAXN][MAXM];
void solve(int pos,int nl,int nr,int ml,int mr){
    if(nl>nr) return;
    int nmid=nl+nr>>1,mmid;
    _rep(i,ml,min(mid,mr)){
        if(dp[pos][nmid]>dp[pos-1][i]+w(i,nmid)){
```

```

        dp[pos][nmid]=dp[pos-1][i]+w(i,nmid);
        mmid=i;
    }
}
solve(pos,nl,nmid-1,ml,mmid);
solve(pos,nmid+1,nr,mmid,mr);
}

```

## 通式

$$f_r = \min_{l=l}^{r-1} w(l,r)$$

该式为类型二样例的更加一般化形式，上述解法仍然适用。

## 类型三

$$f_r = \min_{l=l}^{r-1} (f_l + w(l,r))$$

## 性质

若  $w(l,r)$  满足四边形不等式，则  $f$  具有决策单调性。记  $g(i)$  为最小最优决策点，则  $g(i) \leq g(i+1)$

考虑单调队列二分，维护每个元素的原始位置  $p$  和负责的优决策区间  $[l,r]$

每次新加入一个点  $s$  如果该点对序列末尾  $n$  的决策不如队列末尾的点，则无视该点。

否则和队列末尾的点比较在  $l_{\text{tail}}$  位置的决策，如果  $s$  更优则删去末尾的点，不断操作直到  $s$  不再更优。

最后  $s$  和队列末尾点的最优决策分界点一定位于区间  $[l_{\text{tail}}, r_{\text{tail}}]$  二分查找即可。时间复杂度  $O(n \log n)$

## 例题

[洛谷p3195](#)

### 题意

给定序列  $c$  和常数  $L$  已知一个区间  $[l,r]$  的权值为  $(\sum_{i=l}^r c_{i+r-l-1-L})^2$  现要求将  $[1,n]$  划分为若干连续区间，使得权值和最小。

### 题解

设  $dp_i$  表示区间  $[1,i]$  的最小答案，设  $s_n = \sum_{i=1}^n a_n$  可以得到状态转移方程

$$dp_i = \min(dp_j + (s_i + i - s_j - L)^2)$$

设  $w(l,r)=(s_r+r-s_l-l-1)^2$  不难发现  $w(l,r)$  满足四边形不等式，直接套用即可。

```
const int MAXN=5e4+5;
LL s[MAXN],dp[MAXN],m;
struct Seg{
    int lef,rig,idx;
    Seg(int lef=0,int rig=0,int idx=0):lef(lef),rig(rig),idx(idx){}
}que[MAXN];
LL w(int l,int r){return (s[r]+r-s[l]-l-1-m)*(s[r]+r-s[l]-l-1-m);}
LL cal(int l,int r){return dp[l]+w(l,r);}
int cutSeg(int lef,int rig,int idx1,int idx2){
    int ans;
    while(lef<=rig){
        int mid=lef+rig>>1;
        if(cal(idx1,mid)<cal(idx2,mid)){
            ans=mid;
            lef=mid+1;
        }
        else
            rig=mid-1;
    }
    return ans;
}
int main()
{
    int n=read_int(),head=1,tail=0;
    m=read_int();
    _rep(i,1,n)s[i]=read_int()+s[i-1];
    que[++tail]=Seg(1,n,0);
    _rep(i,1,n){
        dp[i]=cal(que[head].idx,i);
        while(head<=tail&&que[head].rig<=i)head++;
        que[head].lef=i+1;
        if(i<n&&cal(i,n)<=cal(que[tail].idx,n)){
while(head<=tail&&cal(que[tail].idx,que[tail].lef)>=cal(i,que[tail].lef))ta
il--;
            if(head<=tail){
                int p=cutSeg(que[tail].lef,que[tail].rig,que[tail].idx,i);
                que[tail].rig=p;
                que[++tail]=Seg(p+1,n,i);
            }
            else
                que[++tail]=Seg(i+1,n,i);
        }
    }
    enter(dp[n]);
    return 0;
}
```

## 补充性质

1. 若  $w_1, w_2$  均满足四边形不等式(或区间包含单调性)且  $c_1, c_2 \geq 0$  则  $c_1 w_1 + c_2 w_2$  满足四边形不等式(或区间包含单调性)
2. 若存在  $f(x), g(x)$  使得  $w(l, r) = f(r) - g(l)$  则函数  $w(l, r)$  满足四边形恒等式。若  $f(x), g(x)$  单增, 则  $w(l, r)$  满足区间包含单调性。
3. 设  $h(x)$  是一个凸函数, 若函数  $w(l, r)$  满足四边形恒等式并且对区间包含关系具有单调性, 则复合函数  $h(w(l, r))$  也满足四边形不等式。

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:jxm2001:%E5%8A%A8%E6%80%81%E8%A7%84%E5%88%92\\_4&rev=1619620248](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E5%8A%A8%E6%80%81%E8%A7%84%E5%88%92_4&rev=1619620248) 

Last update: 2021/04/28 22:30