

# 同余最短路

## 算法简介

用于计算  $k_1a_1+k_2a_2+\dots+k_na_n$  在  $[0,m]$  范围内能表示的数的算法。

## 算法实现

考虑建点  $0,1,\dots,a_1-1$  然后对每个点  $i$  连边  $i \rightarrow (i+a_j) \bmod a_1 (w=a_j)$  再跑最短路。

于是可以  $O(n \times a \log a)$  计算出最小的可以表示成  $ka_1+r(0 \leq r < a_1)$  的数，于是每个  $r$  对答案的贡献为  $\lfloor \frac{m - \text{dis}(r)}{a_1} \rfloor$

不难发现可以重新排序选最小的  $a$  作为  $a_1$  另外每个点的相邻点可以在跑最短路算法时动态计算，这些都有利于卡常和节省空间。

## 算法例题

### 例题一

[洛谷p2371](#)

板子题。

```
const int MAXN=15,MAXV=5e5+5;
const LL inf=1e18;
int a[MAXN];
LL dis[MAXV];
bool vis[MAXV];
void dj(int n){
    priority_queue<pair<LL,int>> q;
    q.push(make_pair(0,0));
    _for(i,1,a[0])
        dis[i]=inf;
    while(!q.empty()){
        int u=q.top().second;q.pop();
        if(vis[u])
            continue;
        vis[u]=true;
        _for(i,1,n){
            int v=(u+a[i])%a[0],w=a[i];
            if(dis[v]>dis[u]+w){
                dis[v]=dis[u]+w;
                q.push(make_pair(-dis[v],v));
            }
        }
    }
}
```

```
    }  
    }  
}  
LL calc(LL val){  
    LL ans=0;  
    _for(i,0,a[0]){  
        if(dis[i]<=val)  
            ans+=(val-dis[i])/a[0]+1;  
    }  
    return ans;  
}  
int main(){  
    int n=read_int();  
    LL ql=read_LL(),qr=read_LL();  
    _for(i,0,n)  
        a[i]=read_int();  
    sort(a,a+n);  
    dj(n);  
    enter(calc(qr)-calc(ql-1));  
    return 0;  
}
```

## 例题二

### HDU6071

#### 题意

给定一个四元环，环上每条边有一个边权，且重复经过则计算多次贡献。

人物从二号点出发，最终回到二号点，问权值不小于  $k$  的路径的最小权值。

#### 题解

任取一条与二号点相邻的边，设权值为  $w$ 。设  $\text{dis}(i,j)$  表示从二号点出发到达  $i$  号点且距离模  $2w$  等于  $j$  的最小距离。

那么从二号点出发能得到的路径的权值集合为  $\{\text{dis}(2,r)+2kw \mid 0 \leq r < 2w, k \geq 0\}$ 。枚举  $r$  即可计算答案。

关于为什么选取  $2w$  可以解释为回到  $2$  号点后可以在任意一条边上来回移动，正确性不难证明。

```
const int MAXN=5,MAXV=6e4+5;  
const LL inf=2e18;  
int d[MAXN];
```

```

vector<pair<int,int> > g[MAXN];
LL dis[MAXN][MAXV];
bool vis[MAXN][MAXV];
void dj(int n){
    priority_queue<pair<LL,int> > q;
    q.push(make_pair(0,1));
    _for(i,0,4)_for(j,0,n)
    dis[i][j]=inf,vis[i][j]=false;
    dis[1][0]=0;
    while(!q.empty()){
        int u1=q.top().second;
        int u2=(-q.top().first)%n;
        q.pop();
        if(vis[u1][u2])
            continue;
        vis[u1][u2]=true;
        for(pair<int,int> p:g[u1]){
            int v1=p.first,w=p.second,v2=(u2+w)%n;
            if(dis[v1][v2]>dis[u1][u2]+w){
                dis[v1][v2]=dis[u1][u2]+w;
                q.push(make_pair(-dis[v1][v2],v1));
            }
        }
    }
}
LL calc(int val,LL k){
    LL ans=inf;
    _for(i,0,val){
        if(dis[1][i]>k)
            ans=min(ans,dis[1][i]);
        else
            ans=min(ans,dis[1][i]+(k-dis[1][i]+val-1)/val*val);
    }
    return ans;
}
void solve(){
    LL k=read_LL();
    _for(i,0,4)
    g[i].clear();
    _for(i,0,4){
        d[i]=read_int();
        g[i].push_back(make_pair((i+1)%4,d[i]));
        g[(i+1)%4].push_back(make_pair(i,d[i]));
    }
    dj(2*d[0]);
    enter(calc(2*d[0],k));
}
int main(){
    int T=read_int();
    while(T--)
        solve();
}

```

```
return 0;  
}
```

### 例题三

CF986F

#### 题意

$T$  组询问，每组询问给定  $n, k$  求  $n$  是否能用若干个  $k$  的不为  $1$  的因子表示。

数据保证  $k$  的取值不超过  $50$  个。

#### 题解

如果  $n$  能用若干个  $k$  的不为  $1$  的因子表示等价于  $n$  能用  $k$  的素因子表示。

预处理  $O(\sqrt{k})$  范围的数后对每个  $k$  进行因式分解，时间复杂度  $O(\frac{\sqrt{k}}{k} \ln k)$

如果  $k$  是质数，只需要判定  $k \mid n$  是否成立。如果  $k$  有两种素因子，记为  $a, b$  于是等价于求解  $ax + by = n$  的非负整数解。

找到最小的  $y$  满足  $y \equiv nb^{-1} \pmod{x}$  然后验证此时  $by$  是否不超过  $n$  即可。

如果  $k$  有至少三种素因子，显然  $k$  的最小素因子不超过  $O(k^{\frac{1}{3}})$  跑同余最短路算法即可，时间复杂度  $O(k^{\frac{1}{3}} \log k)$

总时间复杂度  $O(50 \left( \frac{\sqrt{k}}{k} \ln k + k^{\frac{1}{3}} \log k \right))$

```
const int MAXV=4e7,MAXN=1e5+5,MAXQ=1e4+5;  
const LL inf=1e18+5;  
int prime[MAXV],pcnt;  
bool vis[MAXV];  
void Init(){  
    _for(i,2,MAXV){  
        if(!vis[i])prime[pcnt++]=i;  
        for(int j=0;j<pcnt&& i*prime[j]<MAXV;j++){  
            vis[i*prime[j]]=true;  
            if(i%prime[j]==0)  
                break;  
        }  
    }  
}  
vector<LL> g;  
void get_frac(LL n){
```

```

g.clear();
_for(i,0,pcnt){
    if(n%prime[i]==0){
        g.push_back(prime[i]);
        while(n%prime[i]==0)n/=prime[i];
    }
}
if(n!=1)
g.push_back(n);
}
int quick_pow(int n,int k,int mod){
int ans=1;
while(k){
    if(k&1)ans=1LL*ans*n%mod;
    n=1LL*n*n%mod;
    k>>=1;
}
return ans;
}
LL dis[MAXN];
void dj(int n){
    _for(i,0,n){
        dis[i]=inf;
        vis[i]=false;
    }
    dis[0]=0;
    priority_queue<LL> q;
    q.push(0);
    while(!q.empty()){
        int u=(-q.top())%n;q.pop();
        if(vis[u])
            continue;
        vis[u]=true;
        _for(i,1,g.size()){
            int v=(u+g[i])%n;
            if(dis[v]>dis[u]+g[i]){
                dis[v]=dis[u]+g[i];
                q.push(-dis[v]);
            }
        }
    }
}
bool query(LL n){
    if(g.size()==0)
        return false;
    if(g.size()==1)
        return n%g[0]==0;
    else if(g.size()==2){
        LL x=g[0],y=g[1];
        int b=(n%x)*quick_pow(y%x,x-2,x)%x;
        return y*b<=n;
    }
}

```

```
    }
    else{
        int m=g[0];
        return dis[n%m]<=n;
    }
}
map<LL,vector<pair<int,LL> > >mp;
bool ans[MAXQ];
void solve(LL k,vector<pair<int,LL> > a){
    get_frac(k);
    if(g.size(>2)
    dj(g[0]);
    for(pair<int,LL> p:a)
    ans[p.first]=query(p.second);
}
int main(){
    Init();
    int q=read_int();
    _for(i,0,q){
        LL n=read_LL(),k=read_LL();
        mp[k].push_back(make_pair(i,n));
    }
    for(map<LL,vector<pair<int,LL> > >::iterator
iter=mp.begin();iter!=mp.end();iter++)
    solve(iter->first,iter->second);
    _for(i,0,q){
        if(ans[i])
            puts("YES");
        else
            puts("NO");
    }
    return 0;
}
```

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:jxm2001:%E5%90%8C%E4%BD%99%E6%9C%80%E7%9F%AD%E8%B7%AF&rev=1630760060](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E5%90%8C%E4%BD%99%E6%9C%80%E7%9F%AD%E8%B7%AF&rev=1630760060)

Last update: 2021/09/04 20:54