

# 图论 1

## 最短路

### 非负权边单源最短路

#### $\text{Dijkstra}$ 算法板子

时间复杂度  $O(m \log m)$

```
template <typename T>
struct dijkstra{
    T dis[MAXN];
    bool vis[MAXN];
    priority_queue<pair<T,int>,vector<pair<T,int> >,greater<pair<T,int> > >q;
    void solve(int src,int n){
        mem(vis,0);
        _rep(i,1,n)
        dis[i]=Inf;
        dis[src]=0;
        q.push(make_pair(dis[src],src));
        while(!q.empty()){
            pair<T,int> temp=q.top();q.pop();
            int u=temp.second;
            if(vis[u])
                continue;
            vis[u]=true;
            for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
                int v=edge[i].to;
                if(dis[v]>edge[i].w+dis[u]){
                    dis[v]=edge[i].w+dis[u];
                    q.push(make_pair(dis[v],v));
                }
            }
        }
    };
};
```

#### 例题

[洛谷p1462](#)

#### 题意

给定  $n$  个城市  $m$  条边以及起点、终点。

要求选择一条路径，满足路径边权和不超过给定值，且路径上的最大点权最小。

### 题解

二分点权上界，跑  $\text{dijkstra}$  时跳过点权大于该上界的点，计算起点到终点的边权和最短路，如果不超过给定值则更新答案。

时间复杂度  $O(n \log m \log v)$

```
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <cstdlib>
#include <algorithm>
#include <string>
#include <sstream>
#include <cstring>
#include <cctype>
#include <cmath>
#include <vector>
#include <set>
#include <map>
#include <stack>
#include <queue>
#include <ctime>
#include <cassert>
#define _for(i,a,b) for(int i=(a);i<(b);++i)
#define _rep(i,a,b) for(int i=(a);i<=(b);++i)
#define mem(a,b) memset(a,b,sizeof(a))
using namespace std;
typedef long long LL;
inline int read_int(){
    int t=0;bool sign=false;char c=getchar();
    while(!isdigit(c)){sign|=c=='-';c=getchar();}
    while(isdigit(c)){t=(t<<1)+(t<<3)+(c&15);c=getchar();}
    return sign?-t:t;
}
inline LL read_LL(){
    LL t=0;bool sign=false;char c=getchar();
    while(!isdigit(c)){sign|=c=='-';c=getchar();}
    while(isdigit(c)){t=(t<<1)+(t<<3)+(c&15);c=getchar();}
    return sign?-t:t;
}
inline char get_char(){
    char c=getchar();
    while(c==' '||c=='\n'||c=='\r')c=getchar();
    return c;
}
```

```

}
inline void write(LL x){
    register char c[21],len=0;
    if(!x)return putchar('0'),void();
    if(x<0)x=-x,putchar('-');
    while(x)c[++len]=x%10,x/=10;
    while(len)putchar(c[len--]+48);
}
inline void space(LL x){write(x),putchar(' ');}
inline void enter(LL x){write(x),putchar('\n');}
const int MAXN=1e4+5,MAXM=5e4+5,Inf=2e9;
struct Edge{
    int to,w,next;
}edge[MAXM<<1];
int head[MAXN],edge_cnt,val[MAXN],limit;
void Insert(int u,int v,int w){
    edge[++edge_cnt].next=head[u];
    edge[edge_cnt].to=v;edge[edge_cnt].w=w;
    head[u]=edge_cnt;
}
template <typename T>
struct dijkstra{
    T dis[MAXN];
    bool vis[MAXN];
    priority_queue<pair<T,int>,vector<pair<T,int> >,greater<pair<T,int> >
>q;
    void solve(int src,int n){
        mem(vis,0);
        _rep(i,1,n)
        dis[i]=Inf;
        dis[src]=0;
        q.push(make_pair(dis[src],src));
        while(!q.empty()){
            pair<T,int> temp=q.top();q.pop();
            int u=temp.second;
            if(vis[u])
                continue;
            vis[u]=true;
            for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
                int v=edge[i].to;
                if(val[v]>limit)
                    continue;
                if(dis[v]>edge[i].w+dis[u]){
                    dis[v]=edge[i].w+dis[u];
                    q.push(make_pair(dis[v],v));
                }
            }
        }
    }
};
dijkstra<LL> dj;

```

```
int main()
{
    int n=read_int(),m=read_int(),b=read_int(),u,v,w,lef=Inf,rig=0;
    _rep(i,1,n){
        val[i]=read_int();
        lef=min(val[i],lef);
        rig=max(val[i],rig);
    }
    while(m--){
        u=read_int(),v=read_int(),w=read_int();
        Insert(u,v,w);
        Insert(v,u,w);
    }
    int mid,ans=-1;
    while(lef<=rig){
        mid=lef+rig>>1;
        limit=mid;
        dj.solve(1,n);
        if(dj.dis[n]<=b){
            ans=mid;
            rig=mid-1;
        }
        else
            lef=mid+1;
    }
    if(ans>=0)
        enter(ans);
    else
        puts("AFK");
    return 0;
}
```

## 带负权边单源最短路

### $\text{SPFA}$ 算法板子

平均时间复杂度  $O(Km)$  最坏时间复杂度  $O(nm)$

```
template <typename T>
struct SPFA{
    T dis[MAXN];
    int len[MAXN];
    bool inque[MAXN];
    bool solve(int src,int n){
        queue<int>q;
        mem(inque,0);mem(len,0);
        _rep(i,1,n)
            dis[i]=Inf;
```

```

    dis[src]=0;len[src]=1;
    q.push(src);
    inque[src]=true;
    while(!q.empty()){
        int u=q.front();q.pop();
        inque[u]=false;
        for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
            int v=edge[i].to;
            if(dis[v]>dis[u]+edge[i].w){
                dis[v]=dis[u]+edge[i].w;
                len[v]=len[u]+1;
                if(len[v]>n)
                    return false;
                if(!inque[v]){
                    q.push(v);
                    inque[v]=true;
                }
            }
        }
    }
    return true;
};

```

## 例题

[洛谷p5960](#)

## 题意

解方程  $\left\{ \begin{array}{l} x_{a1}-x_{b1}\leq y_1 \\ x_{a2}-x_{b2}\leq y_2 \\ \dots \\ x_{am}-x_{bm}\leq y_m \end{array} \right.$

## 题解

将  $x_j-x_i\leq y$  移项，得  $x_j\leq x_i+y$ 。发现该式与单源最短路的三角不等式  $\text{dist}_j\leq \text{dist}_i+\text{w}_{i\to j}$  相似。

考虑添加超级源点  $x_0$ 。向所有其他点连一条权为  $0$  (事实上边权数值无特殊要求，边权相当于为所有解加上一个初始值)的单向边。

然后跑最短路算法即可，解得  $x_i=\text{dist}_i+k$  为方程的一组可行解。

```

#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <cstdlib>
#include <algorithm>

```

```
#include <string>
#include <sstream>
#include <cstring>
#include <cctype>
#include <cmath>
#include <vector>
#include <set>
#include <map>
#include <stack>
#include <queue>
#include <ctime>
#include <cassert>
#define _for(i,a,b) for(int i=(a);i<(b);++i)
#define _rep(i,a,b) for(int i=(a);i<=(b);++i)
#define mem(a,b) memset(a,b,sizeof(a))
using namespace std;
typedef long long LL;
inline int read_int(){
    int t=0;bool sign=false;char c=getchar();
    while(!isdigit(c)){sign|=c=='-';c=getchar();}
    while(isdigit(c)){t=(t<<1)+(t<<3)+(c&15);c=getchar();}
    return sign?-t:t;
}
inline LL read_LL(){
    LL t=0;bool sign=false;char c=getchar();
    while(!isdigit(c)){sign|=c=='-';c=getchar();}
    while(isdigit(c)){t=(t<<1)+(t<<3)+(c&15);c=getchar();}
    return sign?-t:t;
}
inline char get_char(){
    char c=getchar();
    while(c==' '||c=='\n'||c=='\r')c=getchar();
    return c;
}
inline void write(LL x){
    register char c[21],len=0;
    if(!x)return putchar('0'),void();
    if(x<0)x=-x,putchar('-');
    while(x)c[++len]=x%10,x/=10;
    while(len)putchar(c[len--]+48);
}
inline void space(LL x){write(x),putchar(' ');}
inline void enter(LL x){write(x),putchar('\n');}
const int MAXN=1e4+5,MAXM=5e5+5,Inf=1e9;
struct Edge{
    int to,w,next;
}edge[MAXM<<1];
int head[MAXN],edge_cnt;
void Insert(int u,int v,int w){
    edge[++edge_cnt].next=head[u];
```

```

    edge[edge_cnt].to=v;edge[edge_cnt].w=w;
    head[u]=edge_cnt;
}
template <typename T>
struct SPFA{
    T dis[MAXN];
    int len[MAXN];
    bool inque[MAXN];
    bool solve(int src,int n){
        queue<int>q;
        mem(inque,0);mem(len,0);
        _rep(i,1,n)
        dis[i]=Inf;
        dis[src]=0;len[src]=1;
        q.push(src);
        inque[src]=true;
        while(!q.empty()){
            int u=q.front();q.pop();
            inque[u]=false;
            for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
                int v=edge[i].to;
                if(dis[v]>dis[u]+edge[i].w){
                    dis[v]=dis[u]+edge[i].w;
                    len[v]=len[u]+1;
                    if(len[v]>n)
                        return false;
                    if(!inque[v]){
                        q.push(v);
                        inque[v]=true;
                    }
                }
            }
        }
        return true;
    }
};
SPFA<int> spfa;
int main()
{
    int n=read_int(),m=read_int(),u,v,w;
    _rep(i,1,n)Insert(n+1,i,0);
    while(m--){
        u=read_int(),v=read_int(),w=read_int();
        Insert(v,u,w);
    }
    if(spfa.solve(n+1,n+1)){
        _rep(i,1,n){
            if(i>1)putchar(' ');
            write(spfa.dis[i]);
        }
    }
}

```

```
else  
puts("NO");  
return 0;  
}
```

## 带负权边全源最短路

### $\text{Floyd}$ 算法板子

时间复杂度  $O(n^3)$  无法判断负环。

```
int n,dis[MAXN][MAXN];  
void Floyd(){  
    _for(i,0,n)  
        _for(j,0,n)  
            dis[i][j]=Inf;  
    _for(i,0,n)  
        dis[i][i]=0;  
    _for(k,0,n)  
        _for(i,0,n)  
            _for(j,0,n)  
                dis[i][j]=min(dis[i][j],dis[i][k]+dis[k][j]);  
}
```

### 例题

[洛谷p1119](#)

### 题意

给定  $n$  个城市  $m$  条边，每个城市在第  $t_i$  天起才加入点集(保证  $t_i$  升序)。

$q$  个询问，每次询问第  $t$  天的  $dis(i,j)$  保证询问的  $t$  升序。

### 题解

考虑  $\text{Floyd}$  算法本质其实是  $\text{dp}$

$dis[k][i][j]$  表示只使用前  $k$  个点作为中转点时  $i$  到  $j$  间的最短路，可以用滚动数组省去一维。

所以本题只需要按时间更新即可。

```
#include <iostream>  
#include <cstdio>
```

```

#include <cstdlib>
#include <algorithm>
#include <string>
#include <sstream>
#include <cstring>
#include <cctype>
#include <cmath>
#include <vector>
#include <set>
#include <map>
#include <stack>
#include <queue>
#include <ctime>
#include <cassert>
#define _for(i,a,b) for(int i=(a);i<(b);++i)
#define _rep(i,a,b) for(int i=(a);i<=(b);++i)
#define mem(a,b) memset(a,b,sizeof(a))
using namespace std;
typedef long long LL;
inline int read_int(){
    int t=0;bool sign=false;char c=getchar();
    while(!isdigit(c)){sign|=c=='-';c=getchar();}
    while(isdigit(c)){t=(t<<1)+(t<<3)+(c&15);c=getchar();}
    return sign?-t:t;
}
inline LL read_LL(){
    LL t=0;bool sign=false;char c=getchar();
    while(!isdigit(c)){sign|=c=='-';c=getchar();}
    while(isdigit(c)){t=(t<<1)+(t<<3)+(c&15);c=getchar();}
    return sign?-t:t;
}
inline char get_char(){
    char c=getchar();
    while(c==' '||c=='\n'||c=='\r')c=getchar();
    return c;
}
inline void write(LL x){
    register char c[21],len=0;
    if(!x)return putchar('0'),void();
    if(x<0)x=-x,putchar('-');
    while(x)c[++len]=x%10,x/=10;
    while(len)putchar(c[len--]+48);
}
inline void space(LL x){write(x),putchar(' ');}
inline void enter(LL x){write(x),putchar('\n');}
const int MAXN=200+5,Inf=1e9;
int dis[MAXN][MAXN],t[MAXN];
int main()
{
    int n=read_int(),m=read_int(),u,v,w;
    _for(i,0,n)

```

```
t[i]=read_int();
_for(i,0,n)
_for(j,0,n)
dis[i][j]=Inf;
while(m--){
    u=read_int(),v=read_int(),w=read_int();
    dis[u][v]=dis[v][u]=w;
}
_for(i,0,n)
dis[i][i]=0;
int q=read_int(),pos=0,temp;
while(q--){
    u=read_int(),v=read_int(),temp=read_int();
    while(t[pos]<=temp&&pos<n){
        _for(i,0,n)
        _for(j,0,n)
        dis[i][j]=min(dis[i][j],dis[i][pos]+dis[pos][j]);
        pos++;
    }
    if(t[u]>temp||t[v]>temp||dis[u][v]==Inf)
    enter(-1);
    else
    enter(dis[u][v]);
}
return 0;
}
```

## Johnson 算法板子

洛谷p5905

加入虚拟节点，虚拟节点向每个点连一条权值为 0 的单向边。

跑一遍 SPFA 得到每个点到虚拟节点的距离，记该距离为每个点的势能  $h_i$

将原图中的所有边权修改  $w+h_u-h_v$  则新图的每条路径  $s$  到  $t$  的长度为

$$(w_{s,p1}+h_s-h_{p1})+(w_{p1,p2}+h_{p1}-h_{p2})+\dots+(w_{pk,t}+h_{pk}-h_t)=w_{s,p1}+w_{p1,p2}+\dots+w_{pk,t}+h_s-h_t$$

所以新图的最短路与原图等效。

另外，根据 SPFA 结果，有  $h_v \leq h_u + w_{u,v}$  即  $w_{u,v} + h_u - h_v \geq 0$

由于新图所有边权非负，所以可以跑  $n$  轮 Dijkstra 求出全源最短路。

时间复杂度  $O(nm \log m)$  带负环判断。

```
#include <iostream>
```

```

#include <cstdio>
#include <cstdlib>
#include <algorithm>
#include <string>
#include <sstream>
#include <cstring>
#include <cctype>
#include <cmath>
#include <vector>
#include <set>
#include <map>
#include <stack>
#include <queue>
#include <ctime>
#include <cassert>
#define _for(i,a,b) for(int i=(a);i<(b);++i)
#define _rep(i,a,b) for(int i=(a);i<=(b);++i)
#define mem(a,b) memset(a,b,sizeof(a))
using namespace std;
typedef long long LL;
inline int read_int(){
    int t=0;bool sign=false;char c=getchar();
    while(!isdigit(c)){sign|=c=='-';c=getchar();}
    while(isdigit(c)){t=(t<<1)+(t<<3)+(c&15);c=getchar();}
    return sign?-t:t;
}
inline LL read_LL(){
    LL t=0;bool sign=false;char c=getchar();
    while(!isdigit(c)){sign|=c=='-';c=getchar();}
    while(isdigit(c)){t=(t<<1)+(t<<3)+(c&15);c=getchar();}
    return sign?-t:t;
}
inline char get_char(){
    char c=getchar();
    while(c==' '||c=='\n'||c=='\r')c=getchar();
    return c;
}
inline void write(LL x){
    register char c[21],len=0;
    if(!x)return putchar('0'),void();
    if(x<0)x=-x,putchar('-');
    while(x)c[++len]=x%10,x/=10;
    while(len)putchar(c[len--]+48);
}
inline void space(LL x){write(x),putchar(' ');}
inline void enter(LL x){write(x),putchar('\n');}
const int MAXN=3e3+5,MAXM=9e3+5,Inf=1e9;
struct Edge{
    int to,w,next;
}edge[MAXN];
int head[MAXN],edge_cnt;

```

```
void Insert(int u,int v,int w){
    edge[++edge_cnt].next=head[u];
    edge[edge_cnt].to=v;edge[edge_cnt].w=w;
    head[u]=edge_cnt;
}
template <typename T>
struct SPFA{
    T dis[MAXN];
    int len[MAXN];
    bool inque[MAXN];
    bool solve(int src,int n){
        queue<int>q;
        mem(inque,0);mem(len,0);
        _rep(i,1,n)
        dis[i]=Inf;
        dis[src]=0;len[src]=1;
        q.push(src);
        inque[src]=true;
        while(!q.empty()){
            int u=q.front();q.pop();
            inque[u]=false;
            for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
                int v=edge[i].to;
                if(dis[v]>dis[u]+edge[i].w){
                    dis[v]=dis[u]+edge[i].w;
                    len[v]=len[u]+1;
                    if(len[v]>n)
                        return false;
                    if(!inque[v]){
                        q.push(v);
                        inque[v]=true;
                    }
                }
            }
        }
        return true;
    }
};
template <typename T>
struct dijkstra{
    T dis[MAXN];
    bool vis[MAXN];
    priority_queue<pair<T,int>,vector<pair<T,int> >,greater<pair<T,int> >
>q;
    void solve(int src,int n){
        mem(vis,0);
        _rep(i,1,n)
        dis[i]=Inf;
        dis[src]=0;
        q.push(make_pair(dis[src],src));
    }
};
```

```

        while(!q.empty()){
            pair<T,int> temp=q.top();q.pop();
            int u=temp.second;
            if(vis[u])
                continue;
            vis[u]=true;
            for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
                int v=edge[i].to;
                if(dis[v]>edge[i].w+dis[u]){
                    dis[v]=edge[i].w+dis[u];
                    q.push(make_pair(dis[v],v));
                }
            }
        }
    };
    SPFA<int> spfa;
    dijkstra<int> dj;
    int main()
    {
        int n=read_int(),m=read_int(),u,v,w;
        _for(i,0,m){
            u=read_int(),v=read_int(),w=read_int();
            Insert(u,v,w);
        }
        _rep(i,1,n)
        Insert(n+1,i,0);
        if(!spfa.solve(n+1,n+1)){
            puts("-1");
            return 0;
        }
        _rep(u,1,n){
            for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
                int v=edge[i].to;
                edge[i].w+=spfa.dis[u]-spfa.dis[v];
            }
        }
        _rep(i,1,n){
            LL ans=0;
            dj.solve(i,n);
            _rep(j,1,n) if(dj.dis[j]!=Inf)
            dj.dis[j]-=spfa.dis[i]-spfa.dis[j];
            _rep(j,1,n)
            ans+=1LL*j*dj.dis[j];
            enter(ans);
        }
        return 0;
    }
}

```

# 连通分量

## 无向图的割顶与桥

### 定义

若删除节点  $u$  将导致无向图的连通分量增加，则称  $u$  为无向图的割顶。

若删除边  $e$  将导致无向图的连通分量增加，则称  $e$  为无向图的桥。

### 算法思想

考虑  $\text{dfs}$  过程中建树。如果某条边指向的节点是第一次访问，则该边为树边，否则为反向边。易知，不同子树间不存在树边与反向边。

记  $\text{pre}(u)$  为节点  $u$  的  $\text{dfs}$  序， $\text{low}(u)$  为  $u$  及其后代不经过  $u$  与  $\text{fa}_u$  的树边能连回的最早祖先的  $\text{pre}$  值。

顶点  $u$  为割顶当且仅当  $u$  为根节点且  $u$  在树中有两个子节点或  $u$  为非根节点且存在  $u$  的一个子节点  $v$  满足  $\text{low}(v) \geq \text{pre}(u)$

另外若此时还有  $\text{low}(v) > \text{pre}(u)$  则  $(u,v)$  为桥。

只需要  $\text{dfs}$  过程维护一下  $\text{low}$  数组即可，需要从树边的贡献和反向边的贡献两方面考虑。

```
void dfs(int u,int fa){
    low[u]=pre[u]=++dfs_clock;
    int sz=0;
    for(int i=head[u];i;i=nxt[i]){
        int v=to[i];
        if(!pre[v]){//树边贡献
            sz++;
            dfs(v,u);
            low[u]=min(low[u],low[v]);
            if(low[v]>=pre[u])
                iscut[u]=true;
        }
        else if(pre[v]<pre[u]&&v!=fa){//反向边贡献
            low[u]=min(low[u],pre[v]);
        }
    }
    if(fa==-1&&sz==1)//根节点特判
        iscut[u]=false;
}
```

## 无向图的双连通分量

### 定义

给定一个连通图，以下条件等价：

- 任意两点间至少存在两条“点不重复”的路径
- 任意两条边都至少可以找到一个包含它们的简单环。
- 图内部无割顶

若满足上述条件，则称该图是点-双连通的。对一个无向图，称点-双连通的极大子图为点-双连通分量。

类似的，给定一个连通图，以下条件等价：

- 任意两点间至少存在两条“边不重复”的路径
- 每条边都至少可以找到一个包含它的简单环。
- 图内部无桥

若满足上述条件，则称该图是边-双连通的。对一个无向图，称点-双连通的极大子图为边-双连通分量。

### 算法思想

对点-双连通分量，有如下性质：

- 每条边恰好属于一个点-双连通分量
- 任意两个双连通分量间最多有一个公共点，且该点为割顶
- 任意割顶至少属于两个不同的双连通分量

From:  
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:  
[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:jxm2001:%E5%9B%BE%E8%AE%BA\\_1&rev=1594702836](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E5%9B%BE%E8%AE%BA_1&rev=1594702836)

Last update: 2020/07/14 13:00