

# 多项式 3

## 分治 FFT

### 算法简介

$O(n \log^2 n)$  时间解决一些难以直接使用 FFT 解决的问题。

### 算法例题

[洛谷p4721](#)

#### 题意

给定  $g_0, g_1 \cdots g_{n-2}$

已知  $f_0=1, f_{i+1}=\sum_{j=0}^i f_j g_{i-j}$  求  $f_0, f_1 \cdots f_{n-1}$

#### 题解

发现转移过程可以用 CDQ 分治优化，区间  $[\text{lef}, \text{mid}]$  对区间  $[\text{mid}, \text{rig}]$  的贡献为

$$f_{i+1} \text{ gets } \sum_{j=\text{lef}}^{\text{mid}} f_j g_{i-j}$$

套用 NTT 可以  $O(n \log n)$  求出  $\sum_{j=\text{lef}}^{\text{mid}} f_j g_{i-j}, (\text{mid} \leq i < \text{rig})$  于是总时间复杂度为  $O(n \log^2 n)$

```
const int MAXN=1e5+5,Mod=998244353,G=3,Inv_G=332748118;
int quick_pow(int a,int b){
    int ans=1;
    while(b){
        if(b&1)
            ans=1LL*ans*a%Mod;
        a=1LL*a*a%Mod;
        b>>=1;
    }
    return ans;
}
int rev[MAXN<<2];
int build(int k){
    int n,pos=0;
    while((1<<pos)<=k)pos++;
    n=1<<pos;
    _for(i,0,n)rev[i]=(rev[i>>1]>>1)|((i&1)<<(pos-1));
```

```
    return n;
}
void NTT(int *f,int n,int type){
    _for(i,0,n)if(i<rev[i])
        swap(f[i],f[rev[i]]);
    int t1,t2;
    for(int i=1;i<n;i<=<1){
        int w=quick_pow(type==1?G:Inv_G,(Mod-1)/(i<=<1));
        for(int j=0;j<n;j+=(i<=<1)){
            int cur=1;
            _for(k,j,j+i){
                t1=f[k],t2=1LL*cur*f[k+i]%Mod;
                f[k]=(t1+t2)%Mod,f[k+i]=(t1-t2)%Mod;
                cur=1LL*cur*w%Mod;
            }
        }
    }
    if(type==-1){
        int div=quick_pow(n,Mod-2);
        _for(i,0,n)
            f[i]=(1LL*f[i]*div%Mod+Mod)%Mod;
    }
}
int f[MAXN],g[MAXN],t1[MAXN<<2],t2[MAXN<<2];
void solve(int lef,int rig){
    if(lef==rig)return;
    int mid=lef+rig>>1;
    solve(lef,mid);
    int n1=mid-lef,n2=rig-lef-1,n=build(n1+n2);
    _rep(i,0,n1)t1[i]=f[i+lef];_for(i,n1+1,n)t1[i]=0;
    _rep(i,0,n2)t2[i]=g[i];_for(i,n2+1,n)t2[i]=0;
    NTT(t1,n,1);NTT(t2,n,1);
    _for(i,0,n)t1[i]=1LL*t1[i]*t2[i]%Mod;
    NTT(t1,n,-1);
    _for(i,mid,rig)f[i+1]=(f[i+1]+t1[i-lef])%Mod;
    solve(mid+1,rig);
}
int main()
{
    int n=read_int();
    _for(i,0,n-1)
        g[i]=read_int();
    f[0]=1;
    solve(0,n-1);
    _for(i,0,n)
        space(f[i]);
    return 0;
}
```

# 多项式求逆

洛谷p4238

## 算法简介

给定  $f(x)$  求  $f(x)f^{-1}(x) \equiv 1 \pmod{x^n}$  时间复杂度  $O(n \log n)$

## 算法实现

假设已知  $f(x)f_0^{-1}(x) \equiv 1 \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$

由于  $f(x)f^{-1}(x) \equiv 1 \pmod{x^n}$  显然有  $f(x)f^{-1}(x) \equiv 1 \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$

于是  $f^{-1}(x) - f_0^{-1}(x) \equiv 0 \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$

两倍同时平方，有  $f^{-2}(x) - 2f^{-1}(x)f_0^{-1}(x) + f_0^{-2}(x) \equiv 0 \pmod{x^n}$

两边同时乘以  $f(x)$  有  $f^{-1}(x) \equiv f_0^{-1}(x)(2 - f(x)f_0^{-1}(x)) \pmod{x^n}$

现在考虑逆元存在条件，发现只要  $[x^0]f(x)$  的逆元存在，就可以递推出  $f(x)$  的逆元。

于是  $f^{-1}(x)$  存在等价于  $\left([x^0]f(x)\right)^{-1}$  存在。

时间复杂度有  $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n \log n)$  于是  $T(n) = O(n \log n)$

递归版与递推版效率相差不大。

```
// 递归版
int temp[MAXN<<2];
void polyinv(int *f,int *g,int n){
    if(n==1)
        return g[0]=quick_pow(f[0],Mod-2),void();
    ployinv(f,g,(n+1)>>1);
    int m=build(n<<1);
    _for(i,0,n)temp[i]=f[i];_for(i,n,m)temp[i]=0;
    NTT(temp,m,1);NTT(g,m,1);
    _for(i,0,m)g[i]=(2-1LL*temp[i]*g[i]%Mod)*g[i]%Mod;
    NTT(g,m,-1);
    _for(i,n,m)g[i]=0;
}
// 递推版
int temp[MAXN<<2];
void polyinv(int *f,int *g,int n){
    g[0]=quick_pow(f[0],Mod-2);
    int n1=2,n2=4,pos=2;
    while((n1>>1)<n){
        _for(i,0,n2)rev[i]=(rev[i>>1]>>1)|((i&1)<<(pos-1));
```

```
    _for(i,0,n1)temp[i]=f[i];_for(i,n1,n2)temp[i]=0;
    NTT(temp,n2,1);NTT(g,n2,1);
    _for(i,0,n2)g[i]=(2-1LL*temp[i]*g[i]%Mod)*g[i]%Mod;
    NTT(g,n2,-1);
    _for(i,n1,n2)g[i]=0;
    n1<<=1,n2<<=1,pos++;
}
n1>>=1;
_for(i,n,n1)g[i]=0;
}
```

## 多项式开根

[洛谷p5277](#)

### 算法简介

给定  $g(x)$  求  $f^2(x) \equiv g(x) \pmod{x^n}$  时间复杂度  $O(n \log n)$

### 算法实现

假设已知  $f_0^2(x) \equiv g(x) \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$

两边平方，有  $\left(f_0^2(x) - g(x)\right) \equiv 0 \pmod{x^n}$

两边加上  $4f_0^2(x)g(x)$  有  $\left(f_0^2(x) + g(x)\right)^2 \equiv 4f_0^2(x)g(x) \pmod{x^n}$

两边除以  $4f_0^2(x)$  有  $\left(\frac{f_0^2(x) + g(x)}{2f_0^2(x)}\right)^2 \equiv g(x) \pmod{x^n}$

于是有  $f(x) \equiv \frac{f_0^2(x) + g(x)}{2f_0^2(x)} \equiv \frac{f_0(x) + f_0^{-1}(x)g(x)}{2} \pmod{x^n}$

现在考虑  $f(x)$  存在条件，发现只要  $([x^0]f(x))^2 \equiv [x^0]g(x) \pmod{p}$  有解即可。

考虑  $\text{BSGS}$  求出  $[x^0]g(x)$  对应原根的幂次，即可得到  $[x^0]f(x)$

```
HASH_Table<int,int> H;
int bsgs(int a,int b){
    H.clear();
    int m=sqrt(Mod)+1,t=b,base;
    for(int i=1;i<=m;i++){
        t=1LL*t*a%Mod;
        H.insert(t,i);
    }
    t=1,base=quick_pow(a,m);
    for(int i=1;i<=m;i++){
        t=1LL*t*base%Mod;
```

```

        if(H.find(t)!=-1)return m*i-H.find(t);
    }
    return -1;
}
int temp[MAXN<<2],inv_f[MAXN<<2];
void polysqrt(int *f,int *g,int n){
    f[0]=quick_pow(3,bsgs(3,g[0])/2);
    int n1=2,n2=4,pos=2,inv2=quick_pow(2,Mod-2);
    while((n1>>1)<n){
        _for(i,0,n2)rev[i]=(rev[i>>1]>>1)|((i&1)<<(pos-1));
        _for(i,0,n2)inv_f[i]=0;
        ployinv(f,inv_f,n1);
        _for(i,0,n1)temp[i]=g[i];_for(i,n1,n2)temp[i]=0;
        NTT(inv_f,n2,1);NTT(temp,n2,1);
        _for(i,0,n2)temp[i]=1LL*temp[i]*inv_f[i]%Mod;
        NTT(temp,n2,-1);
        _for(i,0,n1)f[i]=1LL*(f[i]+temp[i])*inv2%Mod;
        n1<<=1,n2<<=1,pos++;
    }
    n1>>=1;
    _for(i,n,n1)f[i]=0;
}

```

## 多项式对数函数

[洛谷p4725](#)

### 算法简介

给定  $f(x)$  求模  $x^n$  意义下的  $\ln f(x)$  时间复杂度  $O(n \log n)$

### 算法实现

$$\frac{d}{dx}(\ln f(x)) \equiv \frac{f'(x)}{f(x)} \pmod{x^n}$$

$$\ln f(x) - \ln f(0) \equiv \int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)} \pmod{x^n}$$

由于一般只考虑  $f(0)=1$  的情况，同时易知  $\int f'(x) f^{-1}(x)$  常数项为 0，于是有

$$\ln f(x) \equiv \int f'(x) f^{-1}(x) \pmod{x^n}$$

```

int inv_f[MAXN<<2];
void polyln(int *f,int n){
    mem(inv_f,0);
    ployinv(f,inv_f,n);
    int m=build((n-1)<<1);
    _rep(i,1,n)f[i-1]=1LL*f[i]*i%Mod;_for(i,n,m)f[i]=0;
}

```

```
NTT(f,m,1);NTT(inv_f,m,1);
_for(i,0,m)f[i]=1LL*f[i]*inv_f[i]%Mod;
NTT(f,m,-1);
for(int i=n-1;i>=0;i--)f[i]=1LL*f[i-1]*quick_pow(i,Mod-2)%Mod;
f[0]=0;
_for(i,n,m)f[i]=0;
}
```

## 多项式牛顿迭代法

### 算法简介

给定多项式  $g(x)$  求  $f(x)$  满足  $g(f(x)) \equiv 0 \pmod{x^n}$  时间复杂度  $O(n \log n)$

### 算法实现

首先单独求出  $[x^0]g(f(x)) \equiv 0 \pmod{x}$  假设已知  $g(f_0(x)) \equiv 0 \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$

将  $g(x)$  在  $f_0(x)$  处泰勒展开，有

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g^{(i)}(f_0(x))}{i!} (x - f_0(x))^i \equiv 0 \pmod{x^n}$$

同时有  $x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \mid (x - f_0(x))$  于是有  $(x - f_0(x))^i \equiv 0 \pmod{x^n} (i \geq 2)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{g^{(i)}(f_0(x))}{i!} (x - f_0(x))^i \equiv g(f_0(x)) + g'(f_0(x))(x - f_0(x)) \equiv 0 \pmod{x^n}$$

$$f(x) \equiv f_0(x) - \frac{g(f_0(x))}{g'(f_0(x))} \pmod{x^n}$$

准确来说这里把  $f_0(x)$  当成了变元  $y$   $g'(f_0(x)) = \frac{\partial g}{\partial y}(y, x)$

举个例子  $g(f_0(x)) = g(y, x) = xy + x^2 + x = \frac{x f_0(x)}{1} + x^2 + x$   $g'(f_0(x)) = \frac{\partial g}{\partial y}(y, x) = \frac{\partial}{\partial y} (xy + x^2 + x) = x = \frac{x f_0^2(x)}{f_0^2(x)}$

## 多项式指数函数

[洛谷p4726](#)

### 算法简介

给定  $f(x)$  求模  $x^n$  意义下的  $\exp f(x)$  时间复杂度  $O(n \log n)$

## 算法实现

考虑牛顿迭代法，设  $F(x) \equiv \exp f(x) \pmod{x^n}$  于是有  $g(F(x)) \equiv \ln F(x) - f(x) \equiv 0 \pmod{x^n}$

$$F(x) \equiv F_0(x) - \frac{g(F_0(x))}{g'(F_0(x))} \equiv F_0(x) - \frac{\ln F_0(x) - f(x)}{1} \pmod{x^n}$$

```
int ln_g[MAXN<<2];
void polyexp(int *f,int *g,int n){
    g[0]=1;
    int n1=2,n2=4,pos=2;
    while((n1>>1)<n){
        _for(i,0,n1>>1)ln_g[i]=g[i];_for(i,n1>>1,n2)ln_g[i]=0;
        ployln(ln_g,n1);
        ln_g[0]=(1+f[0]-ln_g[0])%Mod;
        _for(i,1,n1)ln_g[i]=(f[i]-ln_g[i])%Mod;
        _for(i,0,n2)rev[i]=(rev[i>>1]>>1)|((i&1)<<(pos-1));
        NTT(g,n2,1);NTT(ln_g,n2,1);
        _for(i,0,n2)g[i]=1LL*g[i]*ln_g[i]%Mod;
        NTT(g,n2,-1);
        _for(i,n1,n2)g[i]=0;
        n1<<=1,n2<<=1,pos++;
    }
    n1>>=1;
    _for(i,n,n1)g[i]=0;
}
```

## 多项式快速幂

[洛谷p5273](#)

### 算法简介

给定  $f(x)$  求模  $x^n$  意义下的  $f^k(x)$  时间复杂度  $O(n \log n)$

### 算法实现

考虑取对数将幂次运算转化为乘法运算加速算法。而多项式取对数存在  $[x^0]f(x)=1$  的限制，大多数情况下无法直接套用。

于是考虑选取  $f(x)$  第一个非零的项，即为  $a_t x^t$  然后提取出  $a_t x^t$  得到下式

$$f^k(x) \equiv a_t^k x^{tk} \exp\left(k \ln \frac{f(x)}{a_t x^t}\right) \pmod{x^n}$$

注意到如果  $k$  为高精度数，需要同时记录  $k \bmod {p-1}$  和  $k \bmod p$  的结果。

其中计算  $a_t^k$  需要  $k \bmod {p-1}$  计算  $\ln \frac{f(x)}{a_t x^t}$  需要  $k \bmod p$  同时考虑提前处理  $x^t$  次数大于  $x^n$  的情况。

```
int ln_f[MAXN<<2];
void polypow(int *f,int n,int k1,int k2){
    LL pos=0, posv;
    while(!f[pos]&&pos<n) pos++;
    if(pos==n) return;
    posv=quick_pow(f[pos],Mod-2);
    _for(i,pos,n) ln_f[i-pos]=f[i]*posv%Mod, f[i]=0;
    _for(i,n-pos,n) ln_f[i]=0;
    ployln(ln_f,n);
    _for(i,0,n) ln_f[i]=1LL*ln_f[i]*k1%Mod;
    ployexp(ln_f,f,n);
    pos=pos*k2; posv=quick_pow(posv,1LL*k2*(Mod-2)%(Mod-1));
    for(int i=n-1; i>=pos; i--) f[i]=f[i-pos]*posv%Mod;
    pos=min(pos,1LL*n);
    _for(i,0,pos) f[i]=0;
}
```

## 多项式除法

[洛谷p4512](#)

### 算法简介

给定  $f(x), g(x)$  不妨记  $\deg(f)=n, \deg(g)=m, n > m$   $O(n \log n)$  时间内求  $q(x), r(x)$  满足  $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$  ( $\deg(q)=n-m, \deg(r) < m$ )

### 算法实现

构造函数  $f^{\{R\}}(x)=x^{\deg(f)}f(\frac{1}{x})$  易知  $f^{\{R\}}(x)$  与  $f(x)$  系数恰好颠倒，可以  $O(n)$  相互转化。

根据已知，有

$$f(\frac{1}{x})=q(\frac{1}{x})g(\frac{1}{x})+r(\frac{1}{x})$$

将上式两边同时乘以  $x^n$  有

$$f^{\{R\}}(x)=q^{\{R\}}(x)g^{\{R\}}(x)+x^{n-\deg(r)}r^{\{R\}}(x)$$

由于  $n-\deg(r) \geq n-m+1$  于是有

$$f^{\{R\}}(x) \equiv q^{\{R\}}(x)g^{\{R\}}(x) \pmod{x^{n-m+1}}$$

于是可以利用多项式求逆求出  $q^{\{R\}}(x)$  然后据此求出  $q(x), r(x)$

```
int temp1[MAXN<<2],temp2[MAXN<<2];
void polydiv(int *f,int *g,int *q,int *r,int n,int m){
    _for(i,0,n)temp1[i]=f[n-1-i];
    _for(i,0,m)temp2[i]=g[m-1-i];
    ployinv(temp2,q,n-m+1);
    int N=build(2*n-m-1);
    NTT(q,N,1);NTT(temp1,N,1);
    _for(i,0,N)q[i]=1LL*q[i]*temp1[i]%Mod;
    NTT(q,N,-1);
    _for(i,0,N)temp1[i]=temp2[i]=0;
    for(int i=0,j=n-m;i<j;i++,j--)swap(q[i],q[j]);
    _for(i,n-m+1,N)q[i]=0;
    _for(i,0,n-m+1)temp1[i]=q[i];
    _for(i,0,m)temp2[i]=g[i];
    N=build(n-1);
    NTT(temp1,N,1);NTT(temp2,N,1);
    _for(i,0,N)temp1[i]=1LL*temp1[i]*temp2[i]%Mod;
    NTT(temp1,N,-1);
    _for(i,0,m-1)r[i]=(f[i]+Mod-temp1[i])%Mod;
    _for(i,0,N)temp1[i]=temp2[i]=0;
}
```

From:  
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:  
[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string;jxm2001:%E5%A4%9A%E9%A1%B9%E5%BC%8F\\_3&rev=1597198334](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string;jxm2001:%E5%A4%9A%E9%A1%B9%E5%BC%8F_3&rev=1597198334)

Last update: 2020/08/12 10:12