

# 多项式 3

## 倍增 FFT

### 算法简介

主要用于加速可以倍增转移的动态规划，时间复杂度  $O(n \log^2 n)$

### 算法例题

CF755G

#### 题意

将  $n$  个球排成一排。规定一个组至少包含一个球，至多包含两个相邻的球，且一个球至多属于一个组。

问从这  $n$  个球中取  $k$  组有多少方案，答案对  $998244353$  取模。

#### 题解

设  $\text{dp}(i,j)$  表示从  $i$  个球里选  $j$  组的方案数。

对于第  $n$  个球，要么不选，要么单独构成一个组，要么与第  $n-1$  个球构成一个组，于是有状态转移方程

$$\text{dp}(i,j) = \text{dp}(i-1,j) + \text{dp}(i-1,j-1) + \text{dp}(i-1,j-2)$$

同时将  $a+b$  个球划分为两组  $1 \sim a$  和  $a+1 \sim a+b$  根据  $a, a+1$  是否共同为一组可得状态转移方程

$$\text{dp}(a+b,k) = \sum_{i=0}^k \text{dp}(a,i) \text{dp}(b,k-i) + \sum_{i=0}^{k-1} \text{dp}(a-1,i) \text{dp}(b-1,k-i-1)$$

设  $F_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \text{dp}(n,i) x^i$  于是有

$$F_n(x) = F_{n-1}(x) + x F_{n-1}(x) + x^2 F_{n-2}(x)$$

$$F_{a+b}(x) = F_a(x) F_b(x) + x F_{a-1}(x) F_{b-1}(x)$$

$$F_{2n-2}(x) = F_{n-1}^2(x) + x F_{n-2}^2(x)$$

$$F_{2n-1}(x) = F_n(x) F_{n-1}(x) + x F_{n-1}(x) F_{n-2}(x)$$

$$F_{2n}(x) = F_n^2(x) + x F_{n-1}^2(x)$$

于是可以  $(F_{n-2}, F_{n-1}, F_n)$  递推

$\left(F_{n-1}, F_n, F_{n+1}\right), \left(F_{2n-2}, F_{2n-1}, F_{2n}\right)$

于是用类似快速幂的算法可以  $O(n \log n \log k)$  解决上述问题。

```
const int MAXN=1<<16,Mod=998244353,G=3;
int quick_pow(int a,int b){
    int ans=1;
    while(b){
        if(b&1)
            ans=1LL*ans*a%Mod;
        a=1LL*a*a%Mod;
        b>>=1;
    }
    return ans;
}
int rev[MAXN],Wn[30][2];
void init(){
    int m=Mod-1,lg2=0;
    while(m%2==0)m>>=1,lg2++;
    Wn[lg2][1]=quick_pow(G,m);
    Wn[lg2][0]=quick_pow(Wn[lg2][1],Mod-2);
    while(lg2){
        m<<=1,lg2--;
        Wn[lg2][0]=1LL*Wn[lg2+1][0]*Wn[lg2+1][0]%Mod;
        Wn[lg2][1]=1LL*Wn[lg2+1][1]*Wn[lg2+1][1]%Mod;
    }
}
int build(int k){
    int n,pos=0;
    while((1<<pos)<=k)pos++;
    n=1<<pos;
    _for(i,0,n)rev[i]=(rev[i>>1]>>1)|((i&1)<<(pos-1));
    return n;
}
void NTT(int *f,int n,bool type){
    _for(i,0,n)if(i<rev[i])
        swap(f[i],f[rev[i]]);
    int t1,t2;
    for(int i=1,lg2=0;i<n;i<<=1,lg2++){
        int w=Wn[lg2+1][type];
        for(int j=0;j<n;j+=(i<<1)){
            int cur=1;
            _for(k,j,j+i){
                t1=f[k],t2=1LL*cur*f[k+i]%Mod;
                f[k]=(t1+t2)%Mod,f[k+i]=(t1-t2)%Mod;
                cur=1LL*cur*w%Mod;
            }
        }
    }
}
```

```

    if(!type){
        int div=quick_pow(n,Mod-2);
        _for(i,0,n)f[i]=(1LL*f[i]*div%Mod+Mod)%Mod;
    }
}
int f[3][MAXN],temp[5][MAXN];
void Add(int n){
    _rep(i,0,n)
    f[0][i]=f[1][i],f[1][i]=f[2][i];
    f[2][0]=1;
    _rep(i,1,n)
    f[2][i]=((f[1][i]+f[1][i-1])%Mod+f[0][i-1])%Mod;
}
void Mul(int n){
    int _n=build(n<<1);
    _for(i,0,3)NTT(f[i],_n,true);
    _for(i,0,_n){
temp[0][i]=1LL*f[1][i]*f[1][i]%Mod,temp[1][i]=1LL*f[0][i]*f[0][i]%Mod;
temp[2][i]=1LL*f[2][i]*f[1][i]%Mod,temp[3][i]=1LL*f[1][i]*f[0][i]%Mod;
        temp[4][i]=1LL*f[2][i]*f[2][i]%Mod;
    }
    _for(i,0,5)NTT(temp[i],_n,false);
    f[0][0]=temp[0][0],f[1][0]=temp[2][0],f[2][0]=temp[4][0];
    _rep(i,1,n){
        f[0][i]=(temp[0][i]+temp[1][i-1])%Mod;
        f[1][i]=(temp[2][i]+temp[3][i-1])%Mod;
        f[2][i]=(temp[4][i]+temp[0][i-1])%Mod;
    }
    _for(i,n+1,_n)f[0][i]=f[1][i]=f[2][i]=0;
}
int main()
{
    init();
    int n=read_int(),k=read_int(),pos=30;
    while(n<(1<<pos))pos--;
    f[1][0]=f[2][0]=f[2][1]=1;
    while(pos--){
        Mul(k);
        if(n&(1<<pos))Add(k);
    }
    _rep(i,1,k)space(f[2][i]);
    return 0;
}

```

## 分治 FFT

### 算法简介

$O(n \log^2 n)$  时间解决一些难以直接使用  $\text{FFT}$  解决的问题。

## 算法例题

### 洛谷p4721

#### 题意

给定  $g_0, g_1 \cdots g_{n-2}$

已知  $f_0=1, f_{i+1}=\sum_{j=0}^i f_j g_{i-j}$  求  $f_0, f_1 \cdots f_{n-1}$

#### 题解

发现转移过程可以用  $\text{CDQ}$  分治优化，区间  $[\text{lef}, \text{mid}]$  对区间  $[\text{mid}, \text{rig}]$  的贡献为

$$f_{i+1} \text{ gets } \sum_{j=\text{lef}}^{\text{mid}} f_j g_{i-j}$$

套用  $\text{NTT}$  可以  $O(n \log n)$  求出  $\sum_{j=\text{lef}}^{\text{mid}} f_j g_{i-j}, (\text{mid} \leq i < \text{rig})$  于是总时间复杂度为  $O(n \log^2 n)$

```
const int MAXN=1e5+5, Mod=998244353, G=3, Inv_G=332748118;
int quick_pow(int a, int b){
    int ans=1;
    while(b){
        if(b&1)
            ans=1LL*ans*a%Mod;
        a=1LL*a*a%Mod;
        b>>=1;
    }
    return ans;
}
int rev[MAXN<<2];
int build(int k){
    int n, pos=0;
    while((1<<pos)<=k) pos++;
    n=1<<pos;
    _for(i, 0, n) rev[i]=(rev[i>>1]>>1)|((i&1)<<(pos-1));
    return n;
}
void NTT(int *f, int n, int type){
    _for(i, 0, n) if(i<rev[i])
        swap(f[i], f[rev[i]]);
    int t1, t2;
    for(int i=1; i<n; i<<=1){
        int w=quick_pow(type==1?G:Inv_G, (Mod-1)/(i<<1));
        for(int j=0; j<n; j+=(i<<1)){
            int cur=1;
```

```

        _for(k,j,j+i){
            t1=f[k],t2=1LL*cur*f[k+i]%Mod;
            f[k]=(t1+t2)%Mod,f[k+i]=(t1-t2)%Mod;
            cur=1LL*cur*w%Mod;
        }
    }
}
if(type==-1){
    int div=quick_pow(n,Mod-2);
    _for(i,0,n)
        f[i]=(1LL*f[i]*div%Mod+Mod)%Mod;
}
}
int f[MAXN],g[MAXN],t1[MAXN<<2],t2[MAXN<<2];
void solve(int lef,int rig){
    if(lef==rig)return;
    int mid=lef+rig>>1;
    solve(lef,mid);
    int n1=mid-lef,n2=rig-lef-1,n=build(n1+n2);
    _rep(i,0,n1)t1[i]=f[i+lef];_for(i,n1+1,n)t1[i]=0;
    _rep(i,0,n2)t2[i]=g[i];_for(i,n2+1,n)t2[i]=0;
    NTT(t1,n,1);NTT(t2,n,1);
    _for(i,0,n)t1[i]=1LL*t1[i]*t2[i]%Mod;
    NTT(t1,n,-1);
    _for(i,mid,rig)f[i+1]=(f[i+1]+t1[i-lef])%Mod;
    solve(mid+1,rig);
}
int main()
{
    int n=read_int();
    _for(i,0,n-1)
        g[i]=read_int();
    f[0]=1;
    solve(0,n-1);
    _for(i,0,n)
        space(f[i]);
    return 0;
}

```

## 多项式求逆

[洛谷p4238](#)

### 算法简介

给定  $f(x)$  求  $f(x)^{-1}(x) \equiv 1 \pmod{x^n}$  时间复杂度  $O(n \log n)$

## 算法实现

假设已知  $f(x)f_0^{-1}(x)\equiv 1\pmod{x^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}}$

由于  $f(x)f^{-1}(x)\equiv 1\pmod{x^n}$  显然有  $f(x)f^{-1}(x)\equiv 1\pmod{x^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}}$

于是  $f^{-1}(x)-f_0^{-1}(x)\equiv 0\pmod{x^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}}$

两倍同时平方，有  $f^{-2}(x)-2f^{-1}(x)f_0^{-1}(x)+f_0^{-2}(x)\equiv 0\pmod{x^n}$

两边同时乘以  $f(x)$  有  $f^{-1}(x)\equiv f_0^{-1}(x)(2-f(x)f_0^{-1}(x))\pmod{x^n}$

现在考虑逆元存在条件，发现只要  $[x^0]f(x)$  的逆元存在，就可以递推出  $f(x)$  的逆元。

于是  $f^{-1}(x)$  存在等价于  $\left([x^0]f(x)\right)^{-1}$  存在。

时间复杂度有  $T(n)=T\left(\frac{n}{2}\right)+O(n\log n)$  于是  $T(n)=O(n\log n)$

递归版与递推版效率相差不大。

```
//递归版
int temp[MAXN<<2];
void polyinv(int *f,int *g,int n){
    if(n==1)
        return g[0]=quick_pow(f[0],Mod-2),void();
    ployinv(f,g,(n+1)>>1);
    int m=build(n<<1);
    _for(i,0,n)temp[i]=f[i];_for(i,n,m)temp[i]=0;
    NTT(temp,m,1);NTT(g,m,1);
    _for(i,0,m)g[i]=(2-1LL*temp[i]*g[i]%Mod)*g[i]%Mod;
    NTT(g,m,-1);
    _for(i,n,m)g[i]=0;
}
//递推版
int temp[MAXN<<2];
void polyinv(int *f,int *g,int n){
    g[0]=quick_pow(f[0],Mod-2);
    int n1=2,n2=4,pos=2;
    while((n1>>1)<n){
        _for(i,0,n2)rev[i]=(rev[i>>1]>>1)|((i&1)<<(pos-1));
        _for(i,0,n1)temp[i]=f[i];_for(i,n1,n2)temp[i]=0;
        NTT(temp,n2,1);NTT(g,n2,1);
        _for(i,0,n2)g[i]=(2-1LL*temp[i]*g[i]%Mod)*g[i]%Mod;
        NTT(g,n2,-1);
        _for(i,n1,n2)g[i]=0;
        n1<<=1,n2<<=1,pos++;
    }
    n1>>=1;
    _for(i,n,n1)g[i]=0;
}
```

}

## 多项式开根

洛谷p5277

### 算法简介

给定  $g(x)$  求  $f^2(x) \equiv g(x) \pmod{x^n}$  时间复杂度  $O(n \log n)$

### 算法实现

假设已知  $f_0^2(x) \equiv g(x) \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$

两边平方，有  $\left(f_0^2(x) - g(x)\right) \equiv 0 \pmod{x^n}$

两边加上  $4f_0^2(x)g(x)$  有  $\left(f_0^2(x) + g(x)\right)^2 \equiv 4f_0^2(x)g(x) \pmod{x^n}$

两边除以  $4f_0^2(x)$  有  $\left(\frac{f_0^2(x) + g(x)}{2f_0^2(x)}\right)^2 \equiv g(x) \pmod{x^n}$

于是有  $f(x) \equiv \frac{f_0^2(x) + g(x)}{2f_0^2(x)} \equiv \frac{f_0(x) + f_0^{-1}(x)g(x)}{2} \pmod{x^n}$

现在考虑  $f(x)$  存在条件，发现只要  $([x^0]f(x))^2 \equiv [x^0]g(x) \pmod{p}$  有解即可。

考虑  $\text{BSGS}$  求出  $[x^0]g(x)$  对应原根的幂次，即可得到  $[x^0]f(x)$

```

HASH_Table<int,int> H;
int bsgs(int a,int b){
    H.clear();
    int m=sqrt(Mod)+1,t=b,base;
    for(int i=1;i<=m;i++){
        t=1LL*t*a%Mod;
        H.insert(t,i);
    }
    t=1,base=quick_pow(a,m);
    for(int i=1;i<=m;i++){
        t=1LL*t*base%Mod;
        if(H.find(t)!=-1)return m*i-H.find(t);
    }
    return -1;
}
int temp[MAXN<<2],inv_f[MAXN<<2];
void polysqrt(int *f,int *g,int n){
    f[0]=quick_pow(3,bsgs(3,g[0])/2);
    int n1=2,n2=4,pos=2,inv2=quick_pow(2,Mod-2);
    while((n1>>1)<n){
        _for(i,0,n2) rev[i]=(rev[i>>1]>>1)|((i&1)<<(pos-1));
    }
}

```

```
    _for(i,0,n2)inv_f[i]=0;
    ployinv(f,inv_f,n1);
    _for(i,0,n1)temp[i]=g[i];_for(i,n1,n2)temp[i]=0;
    NTT(inv_f,n2,1);NTT(temp,n2,1);
    _for(i,0,n2)temp[i]=1LL*temp[i]*inv_f[i]%Mod;
    NTT(temp,n2,-1);
    _for(i,0,n1)f[i]=1LL*(f[i]+temp[i])*inv2%Mod;
    n1<<=1,n2<<=1,pos++;
}
n1>>=1;
_for(i,n,n1)f[i]=0;
}
```

## 多项式对数函数

[洛谷p4725](#)

### 算法简介

给定  $f(x)$  求模  $x^n$  意义下的  $\ln f(x)$  时间复杂度  $O(n \log n)$

### 算法实现

$$\frac{d}{dx}(\ln f(x)) \equiv \frac{f'(x)}{f(x)} \pmod{x^n}$$

$$\ln f(x) - \ln f(0) \equiv \int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)} \pmod{x^n}$$

由于一般只考虑  $f(0)=1$  的情况，同时易知  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$  常数项为  $0$ ，于是有

$$\ln f(x) \equiv \int \frac{f'(x)}{f(x)} \pmod{x^n}$$

```
int inv_f[MAXN<<2];
void polyln(int *f,int n){
    mem(inv_f,0);
    ployinv(f,inv_f,n);
    int m=build((n-1)<<1);
    _rep(i,1,n)f[i-1]=1LL*f[i]*i%Mod;_for(i,n,m)f[i]=0;
    NTT(f,m,1);NTT(inv_f,m,1);
    _for(i,0,m)f[i]=1LL*f[i]*inv_f[i]%Mod;
    NTT(f,m,-1);
    for(int i=n-1;i>=0;i--)f[i]=1LL*f[i-1]*quick_pow(i,Mod-2)%Mod;
    f[0]=0;
    _for(i,n,m)f[i]=0;
}
```

## 多项式牛顿迭代法

### 算法简介

给定多项式  $g(x)$  求  $f(x)$  满足  $g(f(x)) \equiv 0 \pmod{x^n}$  时间复杂度  $O(n \log n)$

### 算法实现

首先单独求出  $[x^0]g(f(x)) \equiv 0 \pmod{x}$  假设已知  $g(f_0(x)) \equiv 0 \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$

将  $g(x)$  在  $f_0(x)$  处泰勒展开，有

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{g^{(i)}(f_0(x))}{i!} (f(x) - f_0(x))^i \equiv 0 \pmod{x^n}$$

同时有  $x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \mid (f(x) - f_0(x))$  于是有  $(f(x) - f_0(x))^i \equiv 0 \pmod{x^n} (i \geq 2)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{g^{(i)}(f_0(x))}{i!} (f(x) - f_0(x))^i \equiv g(f_0(x)) + g'(f_0(x))(f(x) - f_0(x)) \equiv 0 \pmod{x^n}$$

$$f(x) \equiv f_0(x) - \frac{g(f_0(x))}{g'(f_0(x))} \pmod{x^n}$$

准确来说这里把  $f_0(x)$  当成了变元  $y$   $g'(f_0(x)) = \frac{\partial g}{\partial y}(y, x)$

举个例子  $g(f_0(x)) = g(y, x) = xy + x^2 + x = \frac{x}{f_0(x)} + x^2 + x$   $g'(f_0(x)) = \frac{\partial g}{\partial y}(y, x) = -\frac{x}{f_0^2(x)}$

## 多项式指数函数

[洛谷p4726](#)

### 算法简介

给定  $f(x)$  求模  $x^n$  意义下的  $\exp f(x)$  时间复杂度  $O(n \log n)$

### 算法实现

考虑牛顿迭代法，设  $F(x) \equiv \exp f(x) \pmod{x^n}$  于是有  $g(F(x)) \equiv \ln F(x) - f(x) \equiv 0 \pmod{x^n}$

$$F(x) \equiv F_0(x) - \frac{g(F_0(x))}{g'(F_0(x))} \equiv F_0(x) - \frac{\ln F_0(x) - f(x)}{1} \equiv F_0(x) \left(1 + f(x) - \ln F_0(x)\right) \pmod{x^n}$$

```
int ln_g[MAXN<<2];
void polyexp(int *f, int *g, int n){
```

```
g[0]=1;
int n1=2,n2=4,pos=2;
while((n1>>1)<n){
    _for(i,0,n1>>1)ln_g[i]=g[i];_for(i,n1>>1,n2)ln_g[i]=0;
    ployln(ln_g,n1);
    ln_g[0]=(1+f[0]-ln_g[0])%Mod;
    _for(i,1,n1)ln_g[i]=(f[i]-ln_g[i])%Mod;
    _for(i,0,n2)rev[i]=(rev[i>>1]>>1)|((i&1)<<(pos-1));
    NTT(g,n2,1);NTT(ln_g,n2,1);
    _for(i,0,n2)g[i]=1LL*g[i]*ln_g[i]%Mod;
    NTT(g,n2,-1);
    _for(i,n1,n2)g[i]=0;
    n1<<=1,n2<<=1,pos++;
}
n1>>=1;
_for(i,n,n1)g[i]=0;
}
```

## 多项式快速幂

洛谷p5273

### 算法简介

给定  $f(x)$  求模  $x^n$  意义下的  $f^k(x)$  时间复杂度  $O(n \log n)$

### 算法实现

考虑取对数将幂次运算转化为乘法运算加速算法。而多项式取对数存在  $[x^0]f(x)=1$  的限制，大多数情况下无法直接套用。

于是考虑选取  $f(x)$  第一个非零的项，即为  $a_t x^t$  然后提取出  $a_t x^t$  得到下式

$$f^k(x) \equiv a_t^k x^{tk} \exp\left(k \ln \frac{f(x)}{a_t x^t}\right) \pmod{x^n}$$

注意到如果  $k$  为高精度数，需要同时记录  $k \bmod \{p-1\}$  和  $k \bmod p$  的结果。

其中计算  $a_t^k$  需要  $k \bmod \{p-1\}$  计算  $k \ln \frac{f(x)}{a_t x^t}$  需要  $k \bmod p$  同时考虑提前处理  $x^{tk}$  次数大于  $x^n$  的情况。

```
int ln_f[MAXN<<2];
void polypow(int *f,int n,int k1,int k2){
    LL pos=0,posv;
    while(!f[pos]&&pos<n)pos++;
    if(pos==n)return;
    posv=quick_pow(f[pos],Mod-2);
    _for(i,pos,n)ln_f[i-pos]=f[i]*posv%Mod,f[i]=0;
```

```

_for(i,n-pos,n)ln_f[i]=0;
poyln(ln_f,n);
_for(i,0,n)ln_f[i]=1LL*ln_f[i]*k1%Mod;
poyexp(ln_f,f,n);
pos=pos*k2;posv=quick_pow(posv,1LL*k2*(Mod-2)%(Mod-1));
for(int i=n-1;i>=pos;i--)f[i]=f[i-pos]*posv%Mod;
pos=min(pos,1LL*n);
_for(i,0,pos)f[i]=0;
}

```

## 多项式除法

[洛谷p4512](#)

### 算法简介

给定  $f(x), g(x)$  不妨记  $\deg(f) = n, \deg(g) = m, n > m$   $O(n \log n)$  时间内求  $q(x), r(x)$  满足  $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$  ( $\deg(q) = n - m, \deg(r) < m$ )

### 算法实现

构造函数  $f^{\{R\}}(x) = x^{\deg(f)} f(\frac{1}{x})$  易知  $f^{\{R\}}(x)$  与  $f(x)$  系数恰好反转，可以  $O(n)$  相互转化。

根据已知，有

$$f(\frac{1}{x}) = q(\frac{1}{x})g(\frac{1}{x}) + r(\frac{1}{x})$$

将上式两边同时乘以  $x^n$  有

$$f^{\{R\}}(x) = q^{\{R\}}(x)g^{\{R\}}(x) + x^{n - \deg(r)} r^{\{R\}}(x)$$

由于  $n - \deg(r) \geq n - m + 1$  于是有

$$f^{\{R\}}(x) \equiv q^{\{R\}}(x)g^{\{R\}}(x) \pmod{x^{n-m+1}}$$

于是可以利用多项式求逆求出  $q^{\{R\}}(x)$  然后据此求出  $q(x), r(x)$

```

int temp1[MAXN<<2],temp2[MAXN<<2];
void polydiv(int *f,int *g,int *q,int *r,int n,int m){
_for(i,0,n)temp1[i]=f[n-1-i];
_for(i,0,m)temp2[i]=g[m-1-i];
poyinv(temp2,q,n-m+1);
int N=build(2*n-m-1);
NTT(q,N,1);NTT(temp1,N,1);
_for(i,0,N)q[i]=1LL*q[i]*temp1[i]%Mod;
NTT(q,N,-1);
_for(i,0,N)temp1[i]=temp2[i]=0;
}

```

```
for(int i=0,j=n-m;i<j;i++,j--) swap(q[i],q[j]);
_for(i,n-m+1,N)q[i]=0;
_for(i,0,n-m+1)temp1[i]=q[i];
_for(i,0,m)temp2[i]=g[i];
N=build(n-1);
NTT(temp1,N,1);NTT(temp2,N,1);
_for(i,0,N)temp1[i]=1LL*temp1[i]*temp2[i]%Mod;
NTT(temp1,N,-1);
_for(i,0,m-1)r[i]=(f[i]+Mod-temp1[i])%Mod;
_for(i,0,N)temp1[i]=temp2[i]=0;
}
```

## 多项式板子汇总

```
namespace Poly{
    const int G=3;
    int rev[1<<2],Wn[30][2];
    void init(){
        int m=Mod-1,lg2=0;
        while(m%2==0)m>>=1,lg2++;
        Wn[lg2][1]=quick_pow(G,m);
        Wn[lg2][0]=quick_pow(Wn[lg2][1],Mod-2);
        while(lg2){
            m<<=1,lg2--;
            Wn[lg2][0]=1LL*Wn[lg2+1][0]*Wn[lg2+1][0]%Mod;
            Wn[lg2][1]=1LL*Wn[lg2+1][1]*Wn[lg2+1][1]%Mod;
        }
    }
    int build(int k){
        int n,pos=0;
        while((1<<pos)<=k)pos++;
        n=1<<pos;
        _for(i,0,n)rev[i]=(rev[i>>1]>>1)|((i&1)<<(pos-1));
        return n;
    }
    void NTT(int *f,int n,bool type){
        _for(i,0,n)if(i<rev[i])
            swap(f[i],f[rev[i]]);
        int t1,t2;
        for(int i=1,lg2=0;i<n;i<<=1,lg2++){
            int w=Wn[lg2+1][type];
            for(int j=0;j<n;j+=(i<<1)){
                int cur=1;
                _for(k,j,j+i){
                    t1=f[k],t2=1LL*cur*f[k+i]%Mod;
                    f[k]=(t1+t2)%Mod,f[k+i]=(t1-t2)%Mod;
                    cur=1LL*cur*w%Mod;
                }
            }
        }
    }
}
```

```

    }
}
if(!type){
    int div=quick_pow(n,Mod-2);
    _for(i,0,n)f[i]=(1LL*f[i]*div%Mod+Mod)%Mod;
}
}
void Mul(int *f,int _n,int *g,int _m,int xmod=0){
    int n=build(_n+_m-2);
    _for(i,_n,n)f[i]=0;_for(i,_m,n)g[i]=0;
    NTT(f,n,true);NTT(g,n,true);
    _for(i,0,n)f[i]=1LL*f[i]*g[i]%Mod;
    NTT(f,n,false);
    if(xmod)_for(i,xmod,n)f[i]=0;
}
void Inv(const int *f,int *g,int _n){
    static int temp[MAXN<<2];
    if(_n==1)return g[0]=quick_pow(f[0],Mod-2),void();
    Inv(f,g,(_n+1)>>1);
    int n=build((_n-1)<<1);
    _for(i,(_n+1)>>1,n)g[i]=0;
    _for(i,0,_n)temp[i]=f[i];_for(i,_n,n)temp[i]=0;
    NTT(g,n,true);NTT(temp,n,true);
    _for(i,0,n)g[i]=(2-1LL*temp[i]*g[i]%Mod)*g[i]%Mod;
    NTT(g,n,false);
    _for(i,_n,n)g[i]=0;
}
void Div(const int *f,int _n,const int *g,int _m,int *q,int *r){
    static int temp[MAXN<<2];
    _for(i,0,_m)temp[i]=g[_m-1-i];
    Inv(temp,q,_n-_m+1);
    _for(i,0,_n)temp[i]=f[_n-1-i];
    Mul(q,_n-_m+1,temp,_n,_n-_m+1);
    for(int i=0,j=_n-_m;i<j;i++,j--)swap(q[i],q[j]);
    _for(i,0,_m)r[i]=g[i];_rep(i,0,_n-_m)temp[i]=q[i];
    Mul(r,_m,temp,_n-_m+1,_m);
    _for(i,0,_m)r[i]=(f[i]+Mod-r[i])%Mod;
}
void Ln(const int *f,int *g,int _n){
    static int temp[MAXN<<2];
    Inv(f,g,_n);
    _for(i,1,_n)temp[i-1]=1LL*f[i]*i%Mod;
    temp[_n-1]=0;
    Mul(g,_n,temp,_n-1,_n);
    for(int i=_n-1;i;i--)g[i]=1LL*g[i-1]*quick_pow(i,Mod-2)%Mod;
    g[0]=0;
}
void Exp(const int *f,int *g,int _n){
    static int temp[MAXN<<2];
    if(_n==1)return g[0]=1,void();
    Exp(f,g,(_n+1)>>1);

```

```
_for(i, (_n+1)>>1, _n)g[i]=0;
Ln(g, temp, _n);
temp[0]=(1+f[0]-temp[0])%Mod;
_for(i, 1, _n)temp[i]=(f[i]-temp[i])%Mod;
Mul(g, (_n+1)>>1, temp, _n, _n);
}
void Pow(const int *f, int *g, int _n, int k1, int k2){
    static int temp[MAXN<<2];
    int pos=0, posv;
    while(!f[pos]&&pos<_n)pos++;
    if(1LL*pos*k2>=_n){
        _for(i, 0, _n)g[i]=0;
        return;
    }
    posv=quick_pow(f[pos], Mod-2);
    _for(i, pos, _n)g[i-pos]=1LL*f[i]*posv%Mod;
    _for(i, _n-pos, _n)g[i]=0;
    Ln(g, temp, _n);
    _for(i, 0, _n)temp[i]=1LL*temp[i]*k1%Mod;
    Exp(temp, g, _n);
    pos=pos*k2, posv=quick_pow(posv, 1LL*k2*(Mod-2)*(Mod-1));
    for(int i=_n-1; i>=pos; i--)g[i]=1LL*g[i-pos]*posv%Mod;
    _for(i, 0, pos)g[i]=0;
}
void Sqrt(const int *f, int *g, int _n){
    static int temp1[MAXN<<2], temp2[MAXN<<2];
    if(_n==1)return g[0]=quick_pow(G, bsgs(3, f[0])/2), void();
    Sqrt(f, g, (_n+1)>>1);
    _for(i, (_n+1)>>1, _n)g[i]=0;
    _for(i, 0, _n)temp1[i]=f[i];
    Inv(g, temp2, _n);
    Mul(temp1, _n, temp2, _n);
    int div2=quick_pow(2, Mod-2);
    _for(i, 0, _n)g[i]=1LL*(g[i]+temp1[i])*div2%Mod;
}
}
```

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:jxm2001:%E5%A4%9A%E9%A1%B9%E5%BC%8F\\_3&rev=1597841632](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E5%A4%9A%E9%A1%B9%E5%BC%8F_3&rev=1597841632)

Last update: 2020/08/19 20:53