

# 多项式 3

## 倍增 FFT

### 算法简介

主要用于加速可以倍增转移的动态规划，时间复杂度  $O(n \log^2 n)$

### 算法例题

CF755G

#### 题意

将  $n$  个球排成一排。规定一个组至少包含一个球，至多包含两个相邻的球，且一个球至多属于一个组。

问从这  $n$  个球中取  $k$  组有多少方案，答案对  $998244353$  取模。

#### 题解

设  $\text{dp}(i,j)$  表示从  $i$  个球里选  $j$  组的方案数。

对于第  $n$  个球，要么不选，要么单独构成一个组，要么与第  $n-1$  个球构成一个组，于是有状态转移方程

$$\text{dp}(i,j) = \text{dp}(i-1,j) + \text{dp}(i-1,j-1) + \text{dp}(i-1,j-2)$$

同时将  $a+b$  个球划分为两组  $1 \sim a$  和  $a+1 \sim a+b$  根据  $a, a+1$  是否共同为一组可得状态转移方程

$$\text{dp}(a+b,k) = \sum_{i=0}^k \text{dp}(a,i) \text{dp}(b,k-i) + \sum_{i=0}^{k-1} \text{dp}(a-1,i) \text{dp}(b-1,k-i-1)$$

设  $F_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \text{dp}(n,i) x^i$  于是有

$$F_n(x) = F_{n-1}(x) + x F_{n-1}(x) + x^2 F_{n-2}(x)$$

$$F_{a+b}(x) = F_a(x) F_b(x) + x F_{a-1}(x) F_{b-1}(x)$$

$$F_{2n-2}(x) = F_{n-1}^2(x) + x F_{n-2}^2(x)$$

$$F_{2n-1}(x) = F_n(x) F_{n-1}(x) + x F_{n-1}(x) F_{n-2}(x)$$

$$F_{2n}(x) = F_n^2(x) + x F_{n-1}^2(x)$$

于是可以  $(F_{n-2}, F_{n-1}, F_n)$  递推

$\left(F_{n-1}, F_n, F_{n+1}\right), \left(F_{2n-2}, F_{2n-1}, F_{2n}\right)$

于是用类似快速幂的算法可以  $O(k \log n \log k)$  解决上述问题。

```
const int MAXN=1<<16,Mod=998244353,G=3;
int quick_pow(int a,int b){
    int ans=1;
    while(b){
        if(b&1)
            ans=1LL*ans*a%Mod;
        a=1LL*a*a%Mod;
        b>>=1;
    }
    return ans;
}
int rev[MAXN],Wn[30][2];
void init(){
    int m=Mod-1,lg2=0;
    while(m%2==0)m>>=1,lg2++;
    Wn[lg2][1]=quick_pow(G,m);
    Wn[lg2][0]=quick_pow(Wn[lg2][1],Mod-2);
    while(lg2){
        m<<=1,lg2--;
        Wn[lg2][0]=1LL*Wn[lg2+1][0]*Wn[lg2+1][0]%Mod;
        Wn[lg2][1]=1LL*Wn[lg2+1][1]*Wn[lg2+1][1]%Mod;
    }
}
int build(int k){
    int n,pos=0;
    while((1<<pos)<=k)pos++;
    n=1<<pos;
    _for(i,0,n)rev[i]=(rev[i>>1]>>1)|((i&1)<<(pos-1));
    return n;
}
void NTT(int *f,int n,bool type){
    _for(i,0,n)if(i<rev[i])
        swap(f[i],f[rev[i]]);
    int t1,t2;
    for(int i=1,lg2=0;i<n;i<<=1,lg2++){
        int w=Wn[lg2+1][type];
        for(int j=0;j<n;j+=(i<<1)){
            int cur=1;
            _for(k,j,j+i){
                t1=f[k],t2=1LL*cur*f[k+i]%Mod;
                f[k]=(t1+t2)%Mod,f[k+i]=(t1-t2)%Mod;
                cur=1LL*cur*w%Mod;
            }
        }
    }
}
```

```

    if(!type){
        int div=quick_pow(n,Mod-2);
        _for(i,0,n)f[i]=(1LL*f[i]*div%Mod+Mod)%Mod;
    }
}
int f[3][MAXN],temp[5][MAXN];
void Add(int n){
    _rep(i,0,n)
    f[0][i]=f[1][i],f[1][i]=f[2][i];
    f[2][0]=1;
    _rep(i,1,n)
    f[2][i]=((f[1][i]+f[1][i-1])%Mod+f[0][i-1])%Mod;
}
void Mul(int n){
    int _n=build(n<<1);
    _for(i,0,3)NTT(f[i],_n,true);
    _for(i,0,_n){
temp[0][i]=1LL*f[1][i]*f[1][i]%Mod,temp[1][i]=1LL*f[0][i]*f[0][i]%Mod;
temp[2][i]=1LL*f[2][i]*f[1][i]%Mod,temp[3][i]=1LL*f[1][i]*f[0][i]%Mod;
        temp[4][i]=1LL*f[2][i]*f[2][i]%Mod;
    }
    _for(i,0,5)NTT(temp[i],_n,false);
    f[0][0]=temp[0][0],f[1][0]=temp[2][0],f[2][0]=temp[4][0];
    _rep(i,1,n){
        f[0][i]=(temp[0][i]+temp[1][i-1])%Mod;
        f[1][i]=(temp[2][i]+temp[3][i-1])%Mod;
        f[2][i]=(temp[4][i]+temp[0][i-1])%Mod;
    }
    _for(i,n+1,_n)f[0][i]=f[1][i]=f[2][i]=0;
}
int main()
{
    init();
    int n=read_int(),k=read_int(),pos=30;
    while(n<(1<<pos))pos--;
    f[1][0]=f[2][0]=f[2][1]=1;
    while(pos--){
        Mul(k);
        if(n&(1<<pos))Add(k);
    }
    _rep(i,1,k)space(f[2][i]);
    return 0;
}

```

## 分治 FFT

### 算法简介

$\mathcal{O}(n \log^2 n)$  时间解决一些难以直接使用  $\text{FFT}$  解决的问题。

## 算法例题

### 洛谷p4721

#### 题意

给定  $g_0, g_1 \cdots g_{n-2}$

已知  $f_0=1, f_{i+1}=\sum_{j=0}^i f_j g_{i-j}$  求  $f_0, f_1 \cdots f_{n-1}$

#### 题解

发现转移过程可以用  $\text{CDQ}$  分治优化，区间  $[\text{lef}, \text{mid}]$  对区间  $[\text{mid}, \text{rig}]$  的贡献为

$$f_{i+1} \text{ gets } \sum_{j=\text{lef}}^{\text{mid}} f_j g_{i-j}$$

套用  $\text{NTT}$  可以  $O(n \log n)$  求出  $\sum_{j=\text{lef}}^{\text{mid}} f_j g_{i-j}, (\text{mid} \leq i < \text{rig})$  于是总时间复杂度为  $O(n \log^2 n)$

```
const int MAXN=1e5+5, Mod=998244353, G=3, Inv_G=332748118;
int quick_pow(int a, int b){
    int ans=1;
    while(b){
        if(b&1)
            ans=1LL*ans*a%Mod;
        a=1LL*a*a%Mod;
        b>>=1;
    }
    return ans;
}
int rev[MAXN<<2];
int build(int k){
    int n, pos=0;
    while((1<<pos)<=k) pos++;
    n=1<<pos;
    _for(i, 0, n) rev[i]=(rev[i>>1]>>1)|((i&1)<<(pos-1));
    return n;
}
void NTT(int *f, int n, int type){
    _for(i, 0, n) if(i<rev[i])
        swap(f[i], f[rev[i]]);
    int t1, t2;
    for(int i=1; i<n; i<<=1){
        int w=quick_pow(type==1?G:Inv_G, (Mod-1)/(i<<1));
        for(int j=0; j<n; j+=(i<<1)){
            int cur=1;
```

```

        _for(k,j,j+i){
            t1=f[k],t2=1LL*cur*f[k+i]%Mod;
            f[k]=(t1+t2)%Mod,f[k+i]=(t1-t2)%Mod;
            cur=1LL*cur*w%Mod;
        }
    }
}
if(type==-1){
    int div=quick_pow(n,Mod-2);
    _for(i,0,n)
        f[i]=(1LL*f[i]*div%Mod+Mod)%Mod;
}
}
int f[MAXN],g[MAXN],t1[MAXN<<2],t2[MAXN<<2];
void solve(int lef,int rig){
    if(lef==rig)return;
    int mid=lef+rig>>1;
    solve(lef,mid);
    int n1=mid-lef,n2=rig-lef-1,n=build(n1+n2);
    _rep(i,0,n1)t1[i]=f[i+lef];_for(i,n1+1,n)t1[i]=0;
    _rep(i,0,n2)t2[i]=g[i];_for(i,n2+1,n)t2[i]=0;
    NTT(t1,n,1);NTT(t2,n,1);
    _for(i,0,n)t1[i]=1LL*t1[i]*t2[i]%Mod;
    NTT(t1,n,-1);
    _for(i,mid,rig)f[i+1]=(f[i+1]+t1[i-lef])%Mod;
    solve(mid+1,rig);
}
int main()
{
    int n=read_int();
    _for(i,0,n-1)
        g[i]=read_int();
    f[0]=1;
    solve(0,n-1);
    _for(i,0,n)
        space(f[i]);
    return 0;
}

```

## 算法练习

### CF553E

#### 题意

1. 给定一张  $n$  个点  $m$  条边的无重边无自环的有向图，你要从  $1$  号点到  $n$  号点去
2. 如果你在  $t$  时刻之后才到达  $n$  号点，你要交  $x$  元的罚款
3. 经过每条边需要支付  $w_e$  费用，且经过该边消耗  $k$  个单位时间的概率为  $p_{e,k}(1 \leq k \leq t)$

求最优策略下到达点  $n$  需要花费的最小费用的期望值，数据范围  $n \leq 50, m \leq 100, t \leq 2 \times 10^4$

## 题解

设  $dp(i, j)$  表示走到点  $i$  且已经花费  $j$  个单位时间，达到点  $n$  还需要花费的最小费用的期望值。

$$dp(u, e, j) = \min \left( w_e + \sum_{k=1}^t p_{e,k} dp(v_{e,j+k}) \right)$$

边界条件为  $dp(u, e, j) = x + \text{dis}(u, n) / j > t, dp(n, j) = 0 (j \leq t)$

设  $g(e, j) = \sum_{k=1}^t p_{e,k} dp(v_{e,j+k})$  于是有  $dp(u, e, j) = \min(w_e + g(e, j))$

考虑分治 FFT 先计算出  $dp(u, \text{mid} + 1 \sim \text{rig})$  在计算他们对  $g(e, \text{lef} \sim \text{mid})$  的贡献，再计算出  $dp(u, \text{lef} \sim \text{mid})$

其中  $j \in [\text{lef}, \text{mid}]$  而  $j+k$  需要不遗漏地覆盖  $[\text{mid} + 1, \text{rig}]$  于是  $k \in [1, \text{rig} - \text{lef}]$

记  $a_i = p_{e, \text{rig} - \text{lef} - i}, b_i = dp(v_{e, i + \text{mid} + 1})$  于是

$$g(e, j) = \sum p_{e,k} dp(v_{e,j+k}) = \sum a_{\text{rig} - \text{lef} - k} b_{k + j - \text{mid} - 1}$$

递归边界为  $\text{lef} = \text{rig}$  此时用  $g(e, j)$  更新  $dp(u, e, j)$  由于没有必要通过分治计算出  $dp(u, t + 1 \sim 2t)$  故可以分治前处理。

总时间复杂度  $O(mt \log^2 t)$

```
const int MAXN=55,MAXM=105,MAXT=2e4+5;
const double pi=acos(-1.0),Inf=1e9;
struct complex{
    double x,y;
    complex(double x=0.0,double y=0.0):x(x),y(y){}
    complex operator + (const complex &b){
        return complex(x+b.x,y+b.y);
    }
    complex operator - (const complex &b){
        return complex(x-b.x,y-b.y);
    }
    complex operator * (const complex &b){
        return complex(x*b.x-y*b.y,x*b.y+y*b.x);
    }
};
int rev[MAXT<<2];
int build(int k){
    int n,pos=0;
    while((1<<pos)<=k)pos++;
    n=1<<pos;
```

```

    _for(i,0,n) rev[i]=(rev[i>>1]>>1)|((i&1)<<(pos-1));
    return n;
}
void FFT(complex *f,int n,int type){
    _for(i,0,n)if(i<rev[i])
        swap(f[i],f[rev[i]]);
    complex t1,t2;
    for(int i=1;i<n;i<=1){
        complex w(cos(pi/i),type*sin(pi/i));
        for(int j=0;j<n;j+=(i<<1)){
            complex cur(1.0,0.0);
            _for(k,j,j+i){
                t1=f[k],t2=cur*f[k+i];
                f[k]=t1+t2,f[k+i]=t1-t2;
                cur=cur*w;
            }
        }
    }
    if(type==-1)_for(i,0,n)
        f[i].x/=n;
}
complex t1[MAXT<<3],t2[MAXT<<3];
struct Edge{
    int u,v;
    double w;
}edge[MAXM];
int edge_cnt;
double
dp[MAXN][MAXT<<1],dp2[MAXM][MAXT<<1],dis[MAXN][MAXN],p[MAXM][MAXT<<1];
void cal(int lef,int rig){
    int mid=lef+rig>>1;
    _for(k,0,edge_cnt){
        int n1=rig-lef,n2=rig-mid,n=build(n1+n2-2);
        _for(i,0,n1)t1[i].x=p[k][n1-i],t1[i].y=0.0;_for(i,n1,n)t1[i].x=t1[i].y=0.0;
        _for(i,0,n2)t2[i].x=dp[edge[k].v][i+mid+1],t2[i].y=0.0;_for(i,n2,n)t2[i].x=
        t2[i].y=0.0;
        FFT(t1,n,1);FFT(t2,n,1);
        _for(i,0,n)t1[i]=t1[i]*t2[i];
        FFT(t1,n,-1);
        _rep(i,lef,mid)dp2[k][i]+=t1[i+rig-lef-mid-1].x;
    }
}
void cdq(int lef,int rig){
    int mid=lef+rig>>1;
    if(lef==rig){
        _for(i,0,edge_cnt)
            dp[edge[i].u][mid]=min(dp[edge[i].u][mid],dp2[i][mid]+edge[i].w);
        return;
    }
    cdq(mid+1,rig);
}

```

```
cal(lef,rig);
cdq(lef,mid);
}
int main()
{
    int n=read_int(),m=edge_cnt=read_int(),t=read_int();
    double x=read_int();
    _rep(i,1,n)_rep(j,1,n)dis[i][j]=Inf;
    _rep(i,1,n)dis[i][i]=0.0;
    _for(i,0,m){
        edge[i].u=read_int(),edge[i].v=read_int(),edge[i].w=read_int();
        _rep(j,1,t)p[i][j]=read_int()/1e5;
        dis[edge[i].u][edge[i].v]=edge[i].w;
    }
    _rep(k,1,n)_rep(i,1,n)_rep(j,1,n)
    dis[i][j]=min(dis[i][j],dis[i][k]+dis[k][j]);
    _rep(i,0,t)dp[n][i]=0;_rep(i,t+1,t<<1)dp[n][i]=x;
    _for(i,1,n){
        _rep(j,0,t)dp[i][j]=Inf;
        _rep(j,t+1,t<<1)dp[i][j]=x+dis[i][n];
    }
    cal(0,t<<1);
    cdq(0,t);
    printf("%.10lf",dp[1][0]);
    return 0;
}
```

## 多项式求逆

洛谷p4238

### 算法简介

给定  $f(x)$  求  $f(x)f^{-1}(x) \equiv 1 \pmod{x^n}$  时间复杂度  $O(n \log n)$

### 算法实现

假设已知  $f(x)f_0^{-1}(x) \equiv 1 \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$

由于  $f(x)f^{-1}(x) \equiv 1 \pmod{x^n}$  显然有  $f(x)f^{-1}(x) \equiv 1 \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$

于是  $f^{-1}(x) - f_0^{-1}(x) \equiv 0 \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$

两倍同时平方，有  $f^{-2}(x) - 2f^{-1}(x)f_0^{-1}(x) + f_0^{-2}(x) \equiv 0 \pmod{x^n}$

两边同时乘以  $f(x)$  有  $f^{-1}(x) \equiv f_0^{-1}(x)(2-f(x)f_0^{-1}(x)) \pmod{x^n}$

现在考虑逆元存在条件，发现只要  $[x^0]f(x)$  的逆元存在，就可以递推出  $f(x)$  的逆元。

于是  $f^{-1}(x)$  存在等价于  $\left([x^0]f(x)\right)^{-1}$  存在。

时间复杂度有  $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n \log n)$  于是  $T(n) = O(n \log n)$

递归版与递推版效率相差不大。

```
// 递归版
int temp[MAXN<<2];
void polyinv(int *f,int *g,int n){
    if(n==1)
        return g[0]=quick_pow(f[0],Mod-2),void();
    ployinv(f,g,(n+1)>>1);
    int m=build(n<<1);
    _for(i,0,n)temp[i]=f[i];_for(i,n,m)temp[i]=0;
    NTT(temp,m,1);NTT(g,m,1);
    _for(i,0,m)g[i]=(2-1LL*temp[i]*g[i]%Mod)*g[i]%Mod;
    NTT(g,m,-1);
    _for(i,n,m)g[i]=0;
}

// 递推版
int temp[MAXN<<2];
void polyinv(int *f,int *g,int n){
    g[0]=quick_pow(f[0],Mod-2);
    int n1=2,n2=4,pos=2;
    while((n1>>1)<n){
        _for(i,0,n2)rev[i]=(rev[i>>1]>>1)|((i&1)<<(pos-1));
        _for(i,0,n1)temp[i]=f[i];_for(i,n1,n2)temp[i]=0;
        NTT(temp,n2,1);NTT(g,n2,1);
        _for(i,0,n2)g[i]=(2-1LL*temp[i]*g[i]%Mod)*g[i]%Mod;
        NTT(g,n2,-1);
        _for(i,n1,n2)g[i]=0;
        n1<<=1,n2<<=1,pos++;
    }
    n1>>=1;
    _for(i,n,n1)g[i]=0;
}
```

## 多项式开根

[洛谷p5277](#)

### 算法简介

给定  $g(x)$  求  $f^2(x) \equiv g(x) \pmod{x^n}$  时间复杂度  $O(n \log n)$

## 算法实现

假设已知  $f_0^2(x) \equiv g(x) \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$

两边平方，有  $\left(f_0^2(x) - g(x)\right) \equiv 0 \pmod{x^n}$

两边加上  $4f_0^2(x)g(x)$  有  $\left(f_0^2(x) + g(x)\right)^2 \equiv 4f_0^2(x)g(x) \pmod{x^n}$

两边除以  $4f_0^2(x)$  有  $\left(\frac{f_0^2(x) + g(x)}{2f_0^2(x)}\right)^2 \equiv g(x) \pmod{x^n}$

于是有  $f(x) \equiv \frac{f_0^2(x) + g(x)}{2f_0^2(x)} \equiv \frac{f_0(x) + f_0^{-1}(x)g(x)}{2} \pmod{x^n}$

现在考虑  $f(x)$  存在条件，发现只要  $([x^0]f(x))^2 \equiv [x^0]g(x) \pmod{p}$  有解即可。

考虑  $\text{BSGS}$  求出  $[x^0]g(x)$  对应原根的幂次，即可得到  $[x^0]f(x)$

```
HASH_Table<int,int> H;
int bsgs(int a,int b){
    H.clear();
    int m=sqrt(Mod)+1,t=b,base;
    for(int i=1;i<=m;i++){
        t=1LL*t*a%Mod;
        H.insert(t,i);
    }
    t=1,base=quick_pow(a,m);
    for(int i=1;i<=m;i++){
        t=1LL*t*base%Mod;
        if(H.find(t)!=-1)return m*i-H.find(t);
    }
    return -1;
}
int temp[MAXN<<2],inv_f[MAXN<<2];
void polysqrt(int *f,int *g,int n){
    f[0]=quick_pow(3,bsgs(3,g[0])/2);
    int n1=2,n2=4,pos=2,inv2=quick_pow(2,Mod-2);
    while((n1>>1)<n){
        _for(i,0,n2) rev[i]=(rev[i>>1]>>1)|((i&1)<<(pos-1));
        _for(i,0,n2) inv_f[i]=0;
        ployinv(f,inv_f,n1);
        _for(i,0,n1) temp[i]=g[i];_for(i,n1,n2) temp[i]=0;
        NTT(inv_f,n2,1);NTT(temp,n2,1);
        _for(i,0,n2) temp[i]=1LL*temp[i]*inv_f[i]%Mod;
        NTT(temp,n2,-1);
        _for(i,0,n1) f[i]=1LL*(f[i]+temp[i])*inv2%Mod;
        n1<<=1,n2<<=1,pos++;
    }
    n1>>=1;
    _for(i,n,n1) f[i]=0;
}
```

## 多项式对数函数

洛谷p4725

### 算法简介

给定  $f(x)$  求模  $x^n$  意义下的  $\ln f(x)$  时间复杂度  $O(n \log n)$

### 算法实现

$$\frac{d}{dx}(\ln f(x)) \equiv \frac{f'(x)}{f(x)} \pmod{x^n}$$

$$\ln f(x) - \ln f(0) \equiv \int_0^x f'(t) f^{-1}(t) \pmod{x^n}$$

由于一般只考虑  $f(0)=1$  的情况，同时易知  $\int f'(x) f^{-1}(x)$  常数项为  $0$ ，于是有

$$\ln f(x) \equiv \int f'(x) f^{-1}(x) \pmod{x^n}$$

```
int inv_f[MAXN<<2];
void polyln(int *f,int n){
    mem(inv_f,0);
    ployinv(f,inv_f,n);
    int m=build((n-1)<<1);
    _rep(i,1,n)f[i-1]=1LL*f[i]*i%Mod;_for(i,n,m)f[i]=0;
    NTT(f,m,1);NTT(inv_f,m,1);
    _for(i,0,m)f[i]=1LL*f[i]*inv_f[i]%Mod;
    NTT(f,m,-1);
    for(int i=n-1;i>=0;i--)f[i]=1LL*f[i-1]*quick_pow(i,Mod-2)%Mod;
    f[0]=0;
    _for(i,n,m)f[i]=0;
}
```

## 多项式牛顿迭代法

### 算法简介

给定多项式  $g(x)$  求  $f(x)$  满足  $g(f(x)) \equiv 0 \pmod{x^n}$  时间复杂度  $O(n \log n)$

### 算法实现

首先单独求出  $[x^0]g(f(x)) \equiv 0 \pmod{x}$  假设已知  $g(f_0(x)) \equiv 0 \pmod{x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$

将  $g(x)$  在  $f_0(x)$  处泰勒展开，有

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{g^{(i)}(f_0(x))}{i!} (f(x)-f_0(x))^i \equiv 0 \pmod{x^n}$$

同时有  $x^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \mid (f(x)-f_0(x))$  于是有  $(f(x)-f_0(x))^i \equiv 0 \pmod{x^n} (i \geq 2)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{g^{(i)}(f_0(x))}{i!} (f(x)-f_0(x))^i \equiv g(f_0(x)) + g'(f_0(x))(f(x)-f_0(x)) \equiv 0 \pmod{x^n}$$

$$f(x) \equiv f_0(x) - \frac{g(f_0(x))}{g'(f_0(x))} \pmod{x^n}$$

准确来说这里把  $f_0(x)$  当成了变元  $y$   $g'(f_0(x)) = \frac{\partial g}{\partial y}(y, x)$

举个例子  $g(f_0(x)) = g(y, x) = xy + x^2 + x = \frac{x f_0(x)}{1} + x^2 + x$   $g'(f_0(x)) = \frac{\partial g}{\partial y}(y, x) = \frac{x}{1} = x$   $-\frac{\partial g}{\partial y}(y, x) = -\frac{x}{y^2} = -\frac{x}{f_0^2(x)}$

## 多项式指数函数

洛谷p4726

### 算法简介

给定  $f(x)$  求模  $x^n$  意义下的  $\exp f(x)$  时间复杂度  $O(n \log n)$

### 算法实现

考虑牛顿迭代法，设  $F(x) \equiv \exp f(x) \pmod{x^n}$  于是有  $g(F(x)) \equiv \ln F(x) - f(x) \equiv 0 \pmod{x^n}$

$$F(x) \equiv F_0(x) - \frac{g(F_0(x))}{g'(F_0(x))} \equiv F_0(x) - \frac{\ln F_0(x) - f(x)}{1} \equiv F_0(x) \left(1 + \frac{f(x) - \ln F_0(x)}{F_0(x)}\right) \pmod{x^n}$$

```
int ln_g[MAXN<<2];
void polyexp(int *f, int *g, int n){
    g[0]=1;
    int n1=2, n2=4, pos=2;
    while((n1>>1)<n){
        _for(i, 0, n1>>1) ln_g[i]=g[i]; _for(i, n1>>1, n2) ln_g[i]=0;
        ployln(ln_g, n1);
        ln_g[0]=(1+f[0]-ln_g[0])%Mod;
        _for(i, 1, n1) ln_g[i]=(f[i]-ln_g[i])%Mod;
        _for(i, 0, n2) rev[i]=(rev[i>>1]>>1) | ((i&1)<<(pos-1));
        NTT(g, n2, 1); NTT(ln_g, n2, 1);
        _for(i, 0, n2) g[i]=1LL*g[i]*ln_g[i]%Mod;
        NTT(g, n2, -1);
        _for(i, n1, n2) g[i]=0;
        n1<<=1, n2<<=1, pos++;
    }
}
```

```

n1>>=1;
_for(i,n,n1)g[i]=0;
}

```

## 多项式快速幂

洛谷p5273

### 算法简介

给定  $f(x)$  求模  $x^n$  意义下的  $f^k(x)$  时间复杂度  $O(n \log n)$

### 算法实现

考虑取对数将幂次运算转化为乘法运算加速算法。而多项式取对数存在  $[x^0]f(x)=1$  的限制，大多数情况下无法直接套用。

于是考虑选取  $f(x)$  第一个非零的项，即为  $a_t x^t$  然后提取出  $a_t x^t$  得到下式

$$f^k(x) \equiv a_t^k x^{tk} \exp\left(k \ln \frac{f(x)}{a_t x^t}\right) \pmod{x^n}$$

注意到如果  $k$  为高精度数，需要同时记录  $k \bmod \{p-1\}$  和  $k \bmod p$  的结果。

其中计算  $a_t^k$  需要  $k \bmod \{p-1\}$  计算  $k \ln \frac{f(x)}{a_t x^t}$  需要  $k \bmod p$  同时考虑提前处理  $x^{tk}$  次数大于  $x^n$  的情况。

```

int ln_f[MAXN<<2];
void polypow(int *f,int n,int k1,int k2){
    LL pos=0, posv;
    while(!f[pos]&&pos<n)pos++;
    if(pos==n)return;
    posv=quick_pow(f[pos],Mod-2);
    _for(i,pos,n)ln_f[i-pos]=f[i]*posv%Mod,f[i]=0;
    _for(i,n-pos,n)ln_f[i]=0;
    ployln(ln_f,n);
    _for(i,0,n)ln_f[i]=1LL*ln_f[i]*k1%Mod;
    ployexp(ln_f,f,n);
    pos=pos*k2;posv=quick_pow(posv,1LL*k2*(Mod-2)%(Mod-1));
    for(int i=n-1;i>=pos;i--)f[i]=f[i-pos]*posv%Mod;
    pos=min(pos,1LL*n);
    _for(i,0,pos)f[i]=0;
}

```

## 多项式除法

洛谷p4512

## 算法简介

给定  $f(x), g(x)$  不妨记  $\deg(f) = n, \deg(g) = m, n > m$   $O(n \log n)$  时间内求  $q(x), r(x)$  满足  $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$  ( $\deg(q) = n - m, \deg(r) < m$ )

## 算法实现

构造函数  $f^R(x) = x^{\deg(f)} f(\frac{1}{x})$  易知  $f^R(x)$  与  $f(x)$  系数恰好反转，可以  $O(n)$  相互转化。

根据已知，有

$$f(\frac{1}{x}) = q(\frac{1}{x})g(\frac{1}{x}) + r(\frac{1}{x})$$

将上式两边同时乘以  $x^n$  有

$$f^R(x) = q^R(x)g^R(x) + x^{n - \deg(r)} r^R(x)$$

由于  $n - \deg(r) \geq n - m + 1$  于是有

$$f^R(x) \equiv q^R(x)g^R(x) \pmod{x^{n - m + 1}}$$

于是可以利用多项式求逆求出  $q^R(x)$  然后据此求出  $q(x), r(x)$

```
int temp1[MAXN<<2], temp2[MAXN<<2];
void polydiv(int *f, int *g, int *q, int *r, int n, int m){
    _for(i, 0, n) temp1[i] = f[n - 1 - i];
    _for(i, 0, m) temp2[i] = g[m - 1 - i];
    ployinv(temp2, q, n - m + 1);
    int N = build(2 * n - m - 1);
    NTT(q, N, 1); NTT(temp1, N, 1);
    _for(i, 0, N) q[i] = 1LL * q[i] * temp1[i] % Mod;
    NTT(q, N, -1);
    _for(i, 0, N) temp1[i] = temp2[i] = 0;
    for(int i = 0, j = n - m; i < j; i++, j--) swap(q[i], q[j]);
    _for(i, n - m + 1, N) q[i] = 0;
    _for(i, 0, n - m + 1) temp1[i] = q[i];
    _for(i, 0, m) temp2[i] = g[i];
    N = build(n - 1);
    NTT(temp1, N, 1); NTT(temp2, N, 1);
    _for(i, 0, N) temp1[i] = 1LL * temp1[i] * temp2[i] % Mod;
    NTT(temp1, N, -1);
    _for(i, 0, m - 1) r[i] = (f[i] + Mod - temp1[i]) % Mod;
    _for(i, 0, N) temp1[i] = temp2[i] = 0;
}
```

## 多项式板子汇总

```

namespace Poly{
    const int G=3;
    int rev[MAXN<<2],Wn[30][2];
    void init(){
        int m=Mod-1,lg2=0;
        while(m%2==0)m>>=1,lg2++;
        Wn[lg2][1]=quick_pow(G,m);
        Wn[lg2][0]=quick_pow(Wn[lg2][1],Mod-2);
        while(lg2){
            m<<=1,lg2--;
            Wn[lg2][0]=1LL*Wn[lg2+1][0]*Wn[lg2+1][0]%Mod;
            Wn[lg2][1]=1LL*Wn[lg2+1][1]*Wn[lg2+1][1]%Mod;
        }
    }
    int build(int k){
        int n,pos=0;
        while((1<<pos)<=k)pos++;
        n=1<<pos;
        _for(i,0,n)rev[i]=(rev[i>>1]>>1)|((i&1)<<(pos-1));
        return n;
    }
    void NTT(int *f,int n,bool type){
        _for(i,0,n)if(i<rev[i])
            swap(f[i],f[rev[i]]);
        int t1,t2;
        for(int i=1,lg2=0;i<n;i<<=1,lg2++){
            int w=Wn[lg2+1][type];
            for(int j=0;j<n;j+=(i<<1)){
                int cur=1;
                _for(k,j,j+i){
                    t1=f[k],t2=1LL*cur*f[k+i]%Mod;
                    f[k]=(t1+t2)%Mod,f[k+i]=(t1-t2)%Mod;
                    cur=1LL*cur*w%Mod;
                }
            }
        }
        if(!type){
            int div=quick_pow(n,Mod-2);
            _for(i,0,n)f[i]=(1LL*f[i]*div%Mod+Mod)%Mod;
        }
    }
    void Mul(int *f,int _n,int *g,int _m,int xmod=0){
        int n=build(_n+_m-2);
        _for(i,_n,n)f[i]=0;_for(i,_m,n)g[i]=0;
        NTT(f,n,true);NTT(g,n,true);
        _for(i,0,n)f[i]=1LL*f[i]*g[i]%Mod;
        NTT(f,n,false);
        if(xmod)_for(i,xmod,n)f[i]=0;
    }
}

```

```
}  
void Inv(const int *f,int *g,int _n){  
    static int temp[MAXN<<2];  
    if(_n==1)return g[0]=quick_pow(f[0],Mod-2),void();  
    Inv(f,g,(_n+1)>>1);  
    int n=build((_n-1)<<1);  
    _for(i,(_n+1)>>1,n)g[i]=0;  
    _for(i,0,_n)temp[i]=f[i];_for(i,_n,n)temp[i]=0;  
    NTT(g,n,true);NTT(temp,n,true);  
    _for(i,0,n)g[i]=(2-1LL*temp[i]*g[i]%Mod)*g[i]%Mod;  
    NTT(g,n,false);  
    _for(i,_n,n)g[i]=0;  
}  
void Div(const int *f,int _n,const int *g,int _m,int *q,int *r){  
    static int temp[MAXN<<2];  
    _rep(i,0,_m)temp[i]=g[_m-i];  
    Inv(temp,q,_n-_m+1);  
    _rep(i,0,_n)temp[i]=f[_n-i];  
    Mul(q,_n-_m+1,temp,_n+1,_n-_m+1);  
    for(int i=0,j=_n-_m;i<j;i++,j--)swap(q[i],q[j]);  
    int __m=min(_n-_m+1,_m);  
    _for(i,0,__m)r[i]=g[i];_for(i,0,__m)temp[i]=q[i];  
    Mul(r,__m,temp,__m,__m);  
    _for(i,0,__m)r[i]=(f[i]+Mod-r[i])%Mod;  
}  
void Ln(const int *f,int *g,int _n){  
    static int temp[MAXN<<2];  
    Inv(f,g,_n);  
    _for(i,1,_n)temp[i-1]=1LL*f[i]*i%Mod;  
    temp[_n-1]=0;  
    Mul(g,_n,temp,_n-1,_n);  
    for(int i=_n-1;i;i--)g[i]=1LL*g[i-1]*quick_pow(i,Mod-2)%Mod;  
    g[0]=0;  
}  
void Exp(const int *f,int *g,int _n){  
    static int temp[MAXN<<2];  
    if(_n==1)return g[0]=1,void();  
    Exp(f,g,(_n+1)>>1);  
    _for(i,(_n+1)>>1,_n)g[i]=0;  
    Ln(g,temp,_n);  
    temp[0]=(1+f[0]-temp[0])%Mod;  
    _for(i,1,_n)temp[i]=(f[i]-temp[i])%Mod;  
    Mul(g,(_n+1)>>1,temp,_n,_n);  
}  
void Pow(const int *f,int *g,int _n,int k1,int k2){  
    static int temp[MAXN<<2];  
    int pos=0,posv;  
    while(!f[pos]&&pos<_n)pos++;  
    if(1LL*pos*k2>=_n){  
        _for(i,0,_n)g[i]=0;  
    }
```

```

        return;
    }
    posv=quick_pow(f[pos],Mod-2);
    _for(i,pos,_n)g[i-pos]=1LL*f[i]*posv%Mod;
    _for(i,_n-pos,_n)g[i]=0;
    Ln(g,temp,_n);
    _for(i,0,_n)temp[i]=1LL*temp[i]*k1%Mod;
    Exp(temp,g,_n);
    pos=pos*k2,posv=quick_pow(posv,1LL*k2*(Mod-2)%(Mod-1));
    for(int i=_n-1;i>=pos;i--)g[i]=1LL*g[i-pos]*posv%Mod;
    _for(i,0,pos)g[i]=0;
}
void Sqrt(const int *f,int *g,int _n){
    static int temp1[MAXN<<2],temp2[MAXN<<2];
    if(_n==1)return g[0]=quick_pow(G,bsgs(3,f[0])/2),void();
    Sqrt(f,g,(_n+1)>>1);
    _for(i,(_n+1)>>1,_n)g[i]=0;
    _for(i,0,_n)temp1[i]=f[i];
    Inv(g,temp2,_n);
    Mul(temp1,_n,temp2,_n);
    int div2=quick_pow(2,Mod-2);
    _for(i,0,_n)g[i]=1LL*(g[i]+temp1[i])*div2%Mod;
}
}
}

```

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:jxm2001:%E5%A4%9A%E9%A1%B9%E5%BC%8F\\_3&rev=1598283404](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E5%A4%9A%E9%A1%B9%E5%BC%8F_3&rev=1598283404)

Last update: 2020/08/24 23:36