多项式 4

循环卷积

定义

$$c_k=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}[i+j\bmod p=k]a_ib_j$$

性质

对序列 A,B 做长度为 n 的 FFT 等价于求序列 A,B 的循环卷积。

考虑单位根反演证明

$$ \begin{equation}\begin{split} c_k&=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}[i+j\bmod p=k]a_ib_j\\ &=\frac 1n\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{d=0}^{n-1}w_n^{d(i+j-k)}a_ib_j\\ &=\frac 1n\sum_{d=0}^{n-1}w_n^{-dk}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}w_n^{di}a_iw_n^{dj}b_j\\ &=\frac 1n\sum_{d=0}^{n-1}w_n^{-dk}\left(\sum_{i=0}^{n-1}a_iw_n^{di}\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1}b_jw_n^{dj}\right) \end{split}\end{equation} $$

不难发现 $\left(\sum_{i=0}^{n-1}a_iw_n^{di}\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1}b_jw_n^{dj}\right)$ 即为原来的 DFT 过程□$\frac 1n\sum_{d=0}^{n-1}w_n^{-dk}$ 即为原来的 IDFT□证毕。

事实上普通的卷积计算相当于长度为 2^n 的循环卷积计算，只是循环卷积长度大于 C 序列的长度，所以循环卷积结果即为普通卷积结果。

待定