

# 多项式 4

## 循环卷积

### 定义

$$c_k = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} [i+j \bmod p=k] a_i b_j$$

### 性质

对序列 \$A, B\$ 做长度为 \$n\$ 的 \$\text{FFT}\$ 等价于求序列 \$A, B\$ 的循环卷积。

考虑单位根反演证明

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} [i+j \bmod p=k] a_i b_j \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{d=0}^{n-1} w_n^{d(i+j-k)} a_i b_j \\ &= \frac{1}{n} \sum_{d=0}^{n-1} w_n^{-dk} \left( \sum_{i=0}^{n-1} a_i w_n^{di} \right) \left( \sum_{j=0}^{n-1} b_j w_n^{dj} \right) \end{aligned}$$

不难发现 \$\left( \sum\_{i=0}^{n-1} a\_i w\_n^{di} \right) \left( \sum\_{j=0}^{n-1} b\_j w\_n^{dj} \right)\$ 即为原来的 \$\text{DFT}\$ 过程，\$\frac{1}{n} \sum\_{d=0}^{n-1} w\_n^{-dk}\$ 即为原来的 \$\text{IDFT}\$ 证毕。

事实上普通的卷积计算相当于长度为 \$2^n\$ 的循环卷积计算，只是循环卷积长度大于 \$C\$ 序列的长度，所以循环卷积结果即为普通卷积结果。

### 待定

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string;jxm2001:%E5%A4%9A%E9%A1%B9%E5%BC%8F\\_4&rev=1598173550](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string;jxm2001:%E5%A4%9A%E9%A1%B9%E5%BC%8F_4&rev=1598173550)

Last update: 2020/08/23 17:05