

# 多项式 4

## 循环卷积

### 定义

$$\$ \$ c_k = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} [i+j] \bmod p = k a_i b_j \$ \$$$

### 性质

对序列 \$A, B\$ 做长度为 \$n\$ 的 \$\text{FFT}\$ 等价于求序列 \$A, B\$ 的循环卷积。

考虑单位根反演证明

$$\$ \$ \begin{aligned} & \$ \$ \begin{aligned} c_k &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} [i+j] \bmod p = k a_i b_j \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{d=0}^{n-1} w_n^{d(i+j-k)} a_i b_j \\ &= \frac{1}{n} \sum_{d=0}^{n-1} w_n^{-dk} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} w_n^{di} a_i w_n^{dj} b_j \\ &= \frac{1}{n} \sum_{d=0}^{n-1} w_n^{-dk} \left( \sum_{i=0}^{n-1} a_i w_n^{di} \right) \left( \sum_{j=0}^{n-1} b_j w_n^{dj} \right) \end{aligned} \\ & \$ \$ \text{不难发现} \\ & \$ \$ \left( \sum_{i=0}^{n-1} a_i w_n^{di} \right) \left( \sum_{j=0}^{n-1} b_j w_n^{dj} \right) \text{ 即为原来的 } \text{DFT} \text{ 过程} \\ & \$ \$ \frac{1}{n} \sum_{d=0}^{n-1} w_n^{-dk} \text{ 即为原来的 } \text{IDFT} \text{ 证毕。} \end{aligned}$$

事实上普通的卷积计算相当于长度为 \$2^n\$ 的循环卷积计算，只是循环卷积长度大于 \$C\$ 序列的长度，所以循环卷积结果即为普通卷积结果。

### Bluestein's Algorithm

考虑 \$\text{DFT}\$ 过程，有

$$\$ \$ \begin{aligned} y_k &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i w_n^{ki} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i w_n^{\{k+i\choose 2} - \{k\choose 2} - \{i\choose 2\}} \\ &= w_n^{\{-k\choose 2\}} \sum_{i=0}^{n-1} (a_i w_n^{\{-i\choose 2\}}) w_n^{\{k+i\choose 2\}} \end{aligned}$$

其中 \${n\choose 2}\$ 表示组合数。易知上式可以通过普通卷积求解 \$\text{IDFT}\$ 过程类似。

值得一提的是，循环卷积的求逆、快速幂等操作直接对 \$\text{DFT}\$ 的点值进行相应运算即可。

### 算法例题

Last  
update: 2020-2021:teams:legal\_string:jxm2001: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:jxm2001:%E5%A4%9A%E9%A1%B9%E5%BC%8F\\_4&rev=1598175499](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E5%A4%9A%E9%A1%B9%E5%BC%8F_4&rev=1598175499)  
2020/08/23 多项式\_4  
17:38

From:  
[https://wiki.cvbbacm.com/ - CVBB ACM Team](https://wiki.cvbbacm.com/)

Permanent link:  
[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:jxm2001:%E5%A4%9A%E9%A1%B9%E5%BC%8F\\_4&rev=1598175499](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E5%A4%9A%E9%A1%B9%E5%BC%8F_4&rev=1598175499)

Last update: **2020/08/23 17:38**

