

多项式 4

循环卷积

定义

$$c_k = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} [i+j \bmod p = k] a_i b_j$$

性质

对序列 \$A, B\$ 做长度为 \$n\$ 的 \$\text{FFT}\$ 等价于求序列 \$A, B\$ 的循环卷积。

考虑单位根反演证明

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} [i+j \bmod p = k] a_i b_j \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{d=0}^{n-1} w_n^{d(i+j-k)} a_i b_j \\ &= \frac{1}{n} \sum_{d=0}^{n-1} w_n^{-dk} \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i w_n^{di} \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j w_n^{dj} \right) \end{aligned}$$

不难发现 \$\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i w_n^{di} \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j w_n^{dj} \right)\$ 即为原来的 \$\text{DFT}\$ 过程，\$\frac{1}{n} \sum_{d=0}^{n-1} w_n^{-dk}\$ 即为原来的 \$\text{IDFT}\$ 证毕。

事实上普通的卷积计算相当于长度为 \$2^n\$ 的循环卷积计算，只是循环卷积长度大于 \$C\$ 序列的长度，所以循环卷积结果即为普通卷积结果。

Bluestein's Algorithm

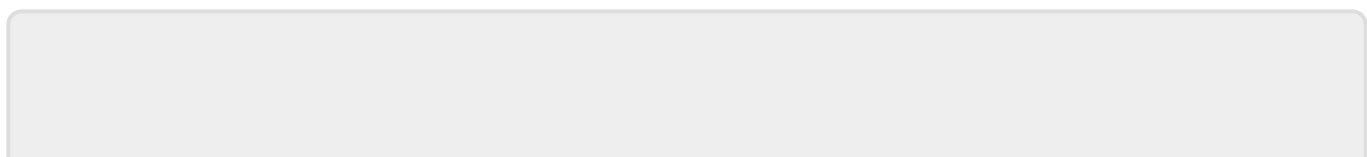
考虑 \$\text{DFT}\$ 过程，有

$$y_k = \sum_{i=0}^{n-1} a_i w_n^{ki} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i w_n^{\binom{k+i}{2} - \binom{k}{2} - \binom{i}{2}} = w_n^{-\binom{k}{2}} \sum_{i=0}^{n-1} \left(a_i w_n^{-\binom{i}{2}} \right) w_n^{\binom{k+i}{2}}$$

其中 \$\binom{n}{2}\$ 表示组合数。易知上式可以通过普通卷积求解 \$\text{IDFT}\$ 过程类似。

值得一提的是，循环卷积的求逆、快速幂等操作直接对 \$\text{DFT}\$ 的点值进行相应运算即可。

算法例题



Last update: 2020-2021:teams:legal_string:jxm2001: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E5%A4%9A%E9%A1%B9%E5%BC%8F_4&rev=1598175499
2020/08/23 多项式_4
17:38

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - **CVBB ACM Team**

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E5%A4%9A%E9%A1%B9%E5%BC%8F_4&rev=1598175499 

Last update: **2020/08/23 17:38**