

多项式 4

循环卷积

定义

$$c_k = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} [i+j \bmod p = k] a_i b_j$$

性质

对序列 A, B 做长度为 n 的 FFT 等价于求序列 A, B 的循环卷积。

考虑单位根反演证明

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} [i+j \bmod p = k] a_i b_j \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{d=0}^{n-1} w_n^{d(i+j-k)} a_i b_j \\ &= \frac{1}{n} \sum_{d=0}^{n-1} w_n^{-dk} \sum_{i=0}^{n-1} w_n^{di} a_i \sum_{j=0}^{n-1} w_n^{dj} b_j \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} w_n^{di} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} w_n^{dj} b_j \right) \end{aligned}$$

不难发现 $\left(\sum_{i=0}^{n-1} w_n^{di} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} w_n^{dj} b_j \right)$ 即为原来的 DFT 过程 $\frac{1}{n} \sum_{d=0}^{n-1} w_n^{-dk}$ 即为原来的 IDFT 证毕。

事实上普通的卷积计算相当于长度为 2^n 的循环卷积计算，只是循环卷积长度大于 C 序列的长度，所以循环卷积结果即为普通卷积结果。

Bluestein's Algorithm

考虑 DFT 过程，有

$$\begin{aligned} y_k &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i w_n^{ki} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i w_n^{\binom{k+i}{2} - \binom{k}{2} - \binom{i}{2}} \\ &= w_n^{-\binom{k}{2}} \sum_{i=0}^{n-1} \left(a_i w_n^{-\binom{i}{2}} \right) w_n^{\binom{k+i}{2}} \end{aligned}$$

其中 $\binom{n}{2}$ 表示组合数。易知上式可以通过普通卷积求解 IDFT 过程类似。

值得一提的是，循环卷积的求逆、快速幂等操作直接对 DFT 的点值进行相应运算即可。

算法例题

[洛谷p5293](#)

题意

给定一个二维 $[L+1] \times n$ 的空间，其中 (u_1, v_1) 到 (u_2, v_2) 有 w_{v_1, v_2} 条重边。

假设起点为 $(0, x)$ 终点为 (last, y) (last 为任意值)，路径长度 m 定义为路径的边数。

对每个 $0 \leq t \leq k$ 求满足所有 $m \equiv t \pmod k$ 且横坐标单增的路径数模 p 意义下的值。

数据保证 p 为素数 $k \leq p$

题解

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E5%A4%9A%E9%A1%B9%E5%BC%8F_4&rev=1598196537

Last update: 2020/08/23 23:28