

多项式 4

循环卷积

定义

```
 $$c_k=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}[i+j]\bmod p=k)a_ib_j$$
```

性质

对序列 \$A,B\$ 做长度为 \$n\$ 的 \$\text{FFT}\$ 等价于求序列 \$A,B\$ 的循环卷积。

考慮单位根反演證明

\$\$ \begin{aligned} & \begin{aligned} c_k = & \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} [i+j] \bmod p = k \\ & \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{d=0}^{n-1} w_n^{d(i+j-k)} a_{ib_j} \\ & = \frac{1}{n} \sum_{d=0}^{n-1} w_n^{-dk} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} w_n^{di} a_{iw_n^d b_j} \\ & = \frac{1}{n} \sum_{d=0}^{n-1} w_n^{-dk} \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_{iw_n^d} \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} b_{jw_n^d} \right) \end{aligned} \end{aligned} \$\$

不难发现

$\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_{iw_n^d} \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} b_{jw_n^d} \right)$ 即为原来的 DFT 过程， $\frac{1}{n} \sum_{d=0}^{n-1} w_n^{-dk}$ 即为原来的 IDFT 证毕。

事实上普通的卷积计算相当于长度为 2^n 的循环卷积计算，只是循环卷积长度大于 C 序列的长度，所以循环卷积结果即为普通卷积结果。

Bluestein's Algorithm

考慮 DFT 過程，有

```
 $$ \begin{aligned} y_k &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i w_n^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i w_n^{k-i} \left( \binom{k+i}{2} - \binom{k}{2} - \binom{i}{2} \right) \\ &\quad + w_n^{k-n} \sum_{i=0}^{n-1} \left( a_i w_n^{k-i} \binom{n-i}{2} \right) w_n^{i-k} \end{aligned} $$

```

其中 $\binom{n}{k}$ 表示组合数。易知上式可以通过普通卷积求解，过程类似。

值得一提的是，循环卷积的求逆、快速幂等操作直接对 DFT 的点值进行相应运算即可。

算法例题

洛谷p5293

题意

给定一个二维 $[L+1] \times n$ 的空间，其中 $(u_1, v_1) \rightarrow (u_2, v_2)$ 有 w_{v_1, v_2} 条重边。

假设起点为 $(0, x)$ ，终点为 (last, y) (last 为任意值)，路径长度 m 定义为路径的边数。

对每个 $0 \leq t < k$ 求满足所有 $m \equiv t \pmod k$ 且横坐标单增的路径数模 p 意义下的值。

数据保证 p 为素数 $k \nmid p$

题解

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E5%A4%9A%E9%A1%B9%E5%BC%8F_4&rev=1598196537

Last update: 2020/08/23 23:28