

数论 1

逆元递推

算法简介

线性时间递推 $O(\sim p-1)$ 在模 p 意义下的乘法逆元。

算法思想

首先 $1^{-1} \equiv 1 \pmod p$

设 $p = k \ast i + r \left(1 \leq r < i < p \right)$

所以有 $k \ast i + r \equiv 0 \pmod p$

两边同乘以 r^{-1} 有 $i^{-1} \equiv -k \ast r^{-1} \pmod p$

即 $i^{-1} \equiv -\lfloor \frac{p}{i} \rfloor \ast i^{-1} \pmod p$

算法模板

[洛谷p3811](#)

```
const int MAXP=3e6+5;
int inv[MAXP];
void get_inv(int p){
    inv[1]=1;
    _for(i,2,p)
        inv[i]=1LL*(p-p/i)*inv[p%i]%p;
}
```

数论分块

算法简介

数论分块用于解决形如 $\sum_{i=1}^n \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$ 的问题，时间复杂度 $O(\sqrt{n})$

算法思想

由于部分 $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor$ 的值相同，所以考虑分块计算。

设对 $\forall i \in \lfloor l, r \rfloor$ 有 $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ 的值相同。

显然 $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ 等于上一个块的 $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ 加 1 ，故只需要考虑 $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ 的计算。

事实上有
$$\lfloor \frac{n}{\lfloor \frac{n}{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor} \rfloor} \rfloor = \lfloor \frac{n}{\lfloor \frac{n}{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor} \rfloor + 1} \rfloor$$

移项，得
$$\frac{n}{\lfloor \frac{n}{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor} \rfloor + 1} \leq \frac{n}{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor}$$

所以有
$$r = \lfloor \frac{n}{\lfloor \frac{n}{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor} \rfloor} \rfloor$$

关于算法的时间复杂度分析，有时间复杂度等于 $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ 的可能取值个数。

当 $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor \leq \sqrt{n}$ 时，显然这样的取值不超过 \sqrt{n} 个。

当 $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor > \sqrt{n}$ 时，有 $i \leq \sqrt{n}$ 所以这样的取值也不超过 \sqrt{n} 个。

综上所述 $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ 的可能取值个数只有 $O(\sqrt{n})$ 个，时间复杂度证毕。

算法模板

[洛谷p2261](#)

题意

给定 n 和 k 请计算 $\sum_{i=1}^n k \bmod i$

题解

$$\sum_{i=1}^n k \bmod i = \sum_{i=1}^n k - i \ast \lfloor \frac{k}{i} \rfloor = n \ast k - \sum_{i=1}^n i \ast \lfloor \frac{k}{i} \rfloor$$

```
#include <cstdio>
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>
#include <cstring>
#include <cctype>
#include <queue>
#include <cmath>
#define _for(i,a,b) for(int i=(a);i<(b);++i)
#define _rep(i,a,b) for(int i=(a);i<=(b);++i)
#define mem(a,b) memset((a),(b),sizeof(a))
using namespace std;
typedef long long LL;
inline int read_int(){
```

```

int t=0;bool sign=false;char c=getchar();
while(!isdigit(c)){sign|=c=='-';c=getchar();}
while(isdigit(c)){t=(t<<1)+(t<<3)+(c&15);c=getchar();}
return sign?-t:t;
}
inline LL read_LL(){
LL t=0;bool sign=false;char c=getchar();
while(!isdigit(c)){sign|=c=='-';c=getchar();}
while(isdigit(c)){t=(t<<1)+(t<<3)+(c&15);c=getchar();}
return sign?-t:t;
}
inline void write(LL x){
register char c[21],len=0;
if(!x)return putchar('0'),void();
if(x<0)x=-x,putchar('-');
while(x)c[++len]=x%10,x/=10;
while(len)putchar(c[len--]+48);
}
inline void space(LL x){write(x),putchar(' ');}
inline void enter(LL x){write(x),putchar('\n');}
LL pre_s(int k){return 1LL*k*(k+1)/2;}
LL cal(int n,int k){
LL ans=0;
int lef=1,rig=0;
while(lef<=n){
rig=min(n,k/(k/lef));
ans+=(pre_s(rig)-pre_s(lef-1))*(k/lef);
lef=rig+1;
}
return ans;
}
int main()
{
LL n=read_int(),k=read_int();
enter(n*k-cal(min(n,k),k));
return 0;
}

```

算法练习

[洛谷p2260](#)

题意

求
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [i \neq j] (n \bmod i) \ast (m \bmod j) \pmod{19940417}$$

题解

不妨设 $n \leq m$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [i \neq j] (n \bmod i) \operatorname{ast} (m \bmod j) = \sum_{i=1}^n (n \bmod i) \operatorname{ast} \sum_{j=1}^m (m \bmod j) - \sum_{i=1}^n (n \bmod i) \operatorname{ast} (m \bmod i)$$

前面两项解法同模板题，主要关注最后一项。

$$\sum_{i=1}^n (n \bmod i) \operatorname{ast} (m \bmod i) = \sum_{i=1}^n n \operatorname{ast} m - n \operatorname{ast} i \operatorname{ast} \lfloor \frac{m}{i} \rfloor - m \operatorname{ast} i \operatorname{ast} \lfloor \frac{n}{i} \rfloor + i^2 \operatorname{ast} \lfloor \frac{n}{i} \rfloor \operatorname{ast} \lfloor \frac{m}{i} \rfloor$$

类似的，也可以用数论分块解决，注意这条式子的最后一项需要同时处理 n 和 m 的分块边界。

```
#include <cstdio>
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>
#include <cstring>
#include <cctype>
#include <queue>
#include <cmath>
#define _for(i,a,b) for(int i=(a);i<(b);++i)
#define _rep(i,a,b) for(int i=(a);i<=(b);++i)
#define mem(a,b) memset((a),(b),sizeof(a))
using namespace std;
typedef long long LL;
inline int read_int(){
    int t=0;bool sign=false;char c=getchar();
    while(!isdigit(c)){sign|=c=='-';c=getchar();}
    while(isdigit(c)){t=(t<<1)+(t<<3)+(c&15);c=getchar();}
    return sign?-t:t;
}
inline LL read_LL(){
    LL t=0;bool sign=false;char c=getchar();
    while(!isdigit(c)){sign|=c=='-';c=getchar();}
    while(isdigit(c)){t=(t<<1)+(t<<3)+(c&15);c=getchar();}
    return sign?-t:t;
}
inline void write(LL x){
    register char c[21],len=0;
    if(!x)return putchar('0'),void();
    if(x<0)x=-x,putchar('-');
    while(x)c[++len]=x%10,x/=10;
    while(len)putchar(c[len--]+48);
}
inline void space(LL x){write(x),putchar(' ');}
inline void enter(LL x){write(x),putchar('\n');}
```

```

const int mod=19940417;
LL inv6;
LL exgcd(LL a,LL b,LL &tx,LL &ty){
    if(b==0){
        tx=1,ty=0;
        return a;
    }
    LL re=exgcd(b,a%b,ty,tx);
    ty-=a/b*tx;
    return re;
}
LL pre_s_1(int k){return 1LL*k*(k+1)/2%mod;}
LL s_1(int lef,int rig){return (pre_s_1(rig)-pre_s_1(lef-1))%mod;}
LL pre_s_2(int k){return 1LL*k*(k+1)%mod*(2*k+1)%mod*inv6%mod;}
LL s_2(int lef,int rig){return (pre_s_2(rig)-pre_s_2(lef-1))%mod;}
LL cal_1(int i,int n){
    LL ans=0;
    int lef=1,rig=0;
    while(lef<=i){
        rig=min(i,n/(n/lef));
        ans=(ans+s_1(lef,rig)*(n/lef)%mod)%mod;
        lef=rig+1;
    }
    return ans;
}
LL cal_2(int i,int n,int m){
    LL ans=0;
    int lef=1,rig=0;
    while(lef<=i){
        rig=min(i,min(n/(n/lef),m/(m/lef)));
        ans=(ans+s_2(lef,rig)*(n/lef)%mod*(m/lef)%mod)%mod;
        lef=rig+1;
    }
    return ans;
}
int main()
{
    LL n=read_int(),m=read_int(),ans,t;
    if(n>m)
        swap(n,m);
    exgcd(6,mod,inv6,t);
    inv6%=mod;
    ans=(n*n-cal_1(n,n))%mod*((m*m-cal_1(m,m))%mod)%mod;
    ans=(ans-n*n%mod*m%mod)%mod;
    ans=(ans+n*cal_1(n,m)%mod)%mod;
    ans=(ans+m*cal_1(n,n)%mod)%mod;
    ans=(ans-cal_2(n,n,m))%mod;
    ans=(ans+mod)%mod;
    enter(ans);
    return 0;
}

```

Last update: 2020-2021:teams:legal_string:jxm2001: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E6%95%B0%E8%AE%BA_1&rev=1593695577
2020/07/02 数论_1
21:12

}

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E6%95%B0%E8%AE%BA_1&rev=1593695577 

Last update: **2020/07/02 21:12**