

数论 2

前置公式

$$\left(\sum_{d|n} f(x)\right) \left(\sum_{d|m} g(x)\right) = \sum_{d_1|n} \sum_{d_2|m} f(d_1)g(d_2) \tag{1}$$

$$\sum_{m=1}^n \sum_{d|(n,m)} f(d) = \sum_{d|n} f(d) \frac{n}{d} \tag{2}$$

$$\sum_{x|n} \left(f(x) \sum_{y|\frac{n}{x}} g(y)\right) = \sum_{y|n} \left(g(y) \sum_{x|\frac{n}{y}} f(x)\right) \tag{3}$$

可积函数

一般可积函数

定义

数论函数 θ 被定义为可积函数，若

$$(a) \exists n \left(\theta(n) \neq 0 \right)$$

$$(b) \forall n \forall m \left((n,m)=1 \rightarrow \theta(n) \theta(m) = \theta(nm) \right)$$

性质

假定 θ 为可积函数，则

$$\begin{array}{l} (1) \theta(1)=1 \\ (2) \theta(n) = \theta(p_1^{\alpha_1}) \theta(p_2^{\alpha_2}) \dots \theta(p_k^{\alpha_k}) \\ (3) \theta_1, \theta_2 \text{ 可积} \rightarrow \theta_1 \theta_2 \text{ 可积} \end{array}$$

定理

若 θ 为可积函数，则

$$\begin{array}{l} (1) \psi(n) = \sum_{d|n} \theta(d) \text{ 可积} \\ (2) \psi(n) = \prod_{i=1}^k \left(1 + \theta(p_i) + \theta(p_i^2) + \dots + \theta(p_i^{\alpha_i}) \right) \end{array}$$

证明

设 $(n,m)=1$ 则对 $d \mid nm$ 一定存在唯一 $d_1 \mid n, d_2 \mid m, d = d_1 d_2$

同时, 对每对 $d_1 \mid n, d_2 \mid m$ 一定有 $d = d_1 d_2 \mid nm$

所以根据 (1) 式

$$\begin{aligned} \psi(nm) &= \sum_{d \mid nm} \theta(d) = \sum_{d_1 \mid n} \sum_{d_2 \mid m} \theta(d_1) \theta(d_2) \\ &= \left(\sum_{d \mid n} \theta(d) \right) \left(\sum_{d \mid m} \theta(d) \right) = \psi(n) \psi(m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(n) &= \prod_{i=1}^k \psi(p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^k (1 + \theta(p_i) + \theta(p_i^2) + \dots + \theta(p_i^{\alpha_i})) \end{aligned}$$

莫比乌斯函数

定义

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ (-1)^k & n=p_1 p_2 \dots p_k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

性质

若 θ 为可积函数, 根据 (4) 式

$$\begin{aligned} \sum_{d \mid n} \mu(d) \theta(d) &= \prod_{i=1}^k (1 + \mu(p_i) \theta(p_i) + \mu(p_i^2) \theta(p_i^2) + \dots + \mu(p_i^{\alpha_i}) \theta(p_i^{\alpha_i})) \\ &= \prod_{i=1}^k (1 - \theta(p_i)) \end{aligned}$$

特别地

$$\theta(n) \equiv 1, \sum_{d \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\theta(n) = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \mu(d) d = (1-p_1)(1-p_2) \dots (1-p_k)$$

欧拉函数

定义

$$\varphi(n) = \sum_{m=1}^n [(n,m)=1]$$

性质

根据 \$(2)\$ 式、\$(6)\$ 式和 \$(7)\$ 式

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \sum_{m=1}^n [(n,m)=1] = \sum_{m=1}^n \sum_{d \mid (n,m)} \mu(d) \\ &= \sum_{d \mid n} \mu(d) \sum_{d \mid m} 1 = \sum_{d \mid n} \mu(d) \frac{n}{d} = n \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \end{aligned}$$

其他常见可积函数

$$\tau(n) = \sum_{d \mid n} 1 = \prod_{i=1}^k (\alpha_i + 1)$$

$$\sigma(n) = \sum_{d \mid n} d = \prod_{i=1}^k \left(1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{\alpha_i}\right)$$

完全积性函数

$f(x)$ 被定义为完全积性函数若 $\forall n \forall m (f(nm) = f(n)f(m))$

$$e(n) = [n=1]$$

$$I(n) = 1$$

$$id(n) = n$$

线性筛法

先给出线性筛素数的代码

```
const int MAXP=1e6;
bool vis[MAXP];
int prime[MAXP],cnt;
void Prime(){
    vis[1]=true;
    for(i,2,MAXP){
        if(!vis[i]) prime[cnt++]=i;
        for(int j=0;j<cnt&& i*prime[j]<MAXP;j++){
            vis[i*prime[j]]=true;
            if(i%prime[j]==0) break;
        }
    }
}
```

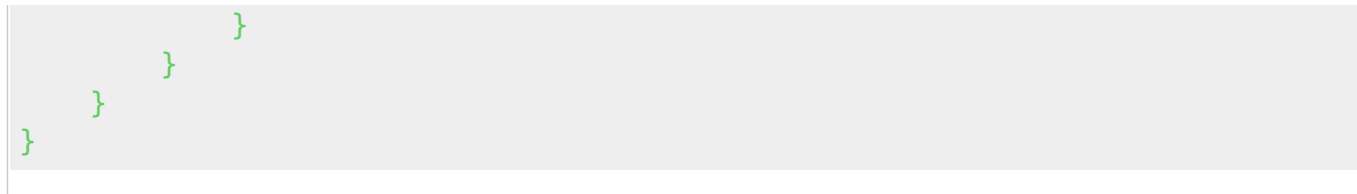
基于线性筛素数和可积函数性质，如果能在 $O(1)$ 时间求出 $f(p^k)$ 就可以线性筛 f 函数，例如

```
const int MAXP=1e6;
bool vis[MAXP];
int prime[MAXP],mu[MAXP],cnt;
void Mu(){
```

```
vis[1]=true,mu[1]=1;
_for(i,2,MAXP){
    if(!vis[i])mu[i]=-1,prime[cnt++]=i;
    for(int j=0;j<cnt&& i*prime[j]<MAXP;j++){
        vis[i*prime[j]]=true;
        if(i%prime[j])
            mu[i*prime[j]]=-mu[i];
        else{
            mu[i*prime[j]]=0;
            break;
        }
    }
}
```

```
const int MAXP=1e6;
bool vis[MAXP];
int prime[MAXP],phi[MAXP],cnt;
void Phi(){
    vis[1]=true,phi[1]=1;
    _for(i,2,MAXP){
        if(!vis[i])phi[i]=i-1,prime[cnt++]=i;
        for(int j=0;j<cnt&& i*prime[j]<MAXP;j++){
            vis[i*prime[j]]=true;
            if(i%prime[j])
                phi[i*prime[j]]=phi[i]*(prime[j]-1);
            else{
                phi[i*prime[j]]=phi[i]*prime[j];
                break;
            }
        }
    }
}
```

```
const int MAXP=1e6;
bool vis[MAXP];
int prime[MAXP],tau[MAXP],mpow[MAXP],cnt;
void Tau(){
    vis[1]=true,tau[1]=1;
    _for(i,2,MAXP){
        if(!vis[i])tau[i]=2,mpow[i]=1,prime[cnt++]=i;
        for(int j=0;j<cnt&& i*prime[j]<MAXP;j++){
            vis[i*prime[j]]=true;
            if(i%prime[j])
                tau[i*prime[j]]=tau[i]<<1,mpow[i*prime[j]]=1;
            else{
                tau[i*prime[j]]=tau[i]/(mpow[i]+1)*(mpow[i]+2),mpow[i*prime[j]]=mpow[i]+1;
                break;
            }
        }
    }
}
```



简单地说,

$$f(ip) = \begin{cases} f(i)f(p) & \text{不是 } p \text{ 的最小素因子} \\ f(p^{k+1}) & \text{是 } p \text{ 的最小素因子} \end{cases}$$

如有必要, 额外存储每个数的最小素因子的幂次即可。

狄利克雷卷积

定义

两个数论函数 f, g 的狄利克雷卷积运算为
$$(f \ast g)(n) = \sum_{d \mid n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

性质

- 1、交换律 $f \ast g = g \ast f$
- 2、结合律 $f \ast (g \ast h) = (f \ast g) \ast h$
- 3、分配律 $(f + g) \ast h = f \ast h + g \ast h$
- 4、单位元 $e \ast f = f$
- 5、逆元：对每个 $f(1) \neq 0$ 的数论函数 f 一定存在某个数论函数 g 使得 $f \ast g = e$
- 6、两个可积函数的狄利克雷卷积仍为可积函数, 可积函数的逆元也为可积函数。

性质 5 证明

事实上, 构造
$$g(n) = \frac{1}{f(1)} \left(e(n) - \sum_{d \mid n, d \neq 1} f(d) \ast g\left(\frac{n}{d}\right) \right)$$

知 $g(n)$ 可由 $g(1) \sim n-1$ 递推得到, 且
$$\sum_{d \mid n} f(d) \ast g\left(\frac{n}{d}\right) = f(1) \ast g(n) + \sum_{d \mid n, d \neq 1} f(d) \ast g\left(\frac{n}{d}\right) = e(n)$$

莫比乌斯反演定理

设 $F(x) \neq 0$ 为数论函数
$$F(n) = \sum_{d \mid n} f(d) \iff f(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right)$$

该定理的另一种形式为
$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) \iff f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F\left(\frac{n}{d}\right)$$

事实上，该定理等价于若 $F = f * 1$ 则 $f = F * \mu$ 。简单地说，莫比乌斯反演定理即证明 $e = 1 * \mu$

证明

根据 (3) 式和 (6) 式

$$\sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{d_1|\frac{n}{d}} f(d_1) = \sum_{d_1|n} \left(f(d_1) \sum_{d|\frac{n}{d_1}} \mu(d) \right) = f(n)$$

一些常见的狄利克雷卷积

1 $1 * \mu = e$

2 $\mu * \text{id} = \varphi$

3 $1 * \text{id} = \sigma$

4 $1 * l = \tau$

5 $1 * \varphi = \text{id}$

6 $\tau * \varphi = \sigma$

证明 1

莫比乌斯反演定理已证明。

证明 2

欧拉函数性质推导过程已证明。

证明 3

根据定义。

证明 4

根据定义。

证明 5

根据前面结论 $\varphi(\mu \text{id}) = (\mu) \text{id} = e \text{id} = \text{id}$

证明 6

根据前面结论 $\tau \varphi = (\text{id}) \text{id} = (\mu) \text{id} = e \sigma = \sigma$

算法练习

习题1

[洛谷p3455](#)

题意

给定 a, b, d 求满足 $x \leq a, y \leq b, (x, y) = d$ 的二元组。

题解 1

在约束条件 $i \leq a, j \leq b$ 下，设 $f(n)$ 为满足 $(i, j) = n$ 的二元组个数 $F(n)$ 为满足 $n \mid (i, j)$ 的二元组个数。

$$f(n) = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b [(i, j) = n]$$

$$F(n) = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b [n \mid (i, j)] = \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{n} \right\rfloor$$

根据莫比乌斯反演定理，有

$$\text{Ans} = f(d) = \sum_{d \mid k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) F(k) = \sum_{d \mid k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) \left\lfloor \frac{a}{k} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{k} \right\rfloor$$

设 $k = t \cdot d$ 改为枚举 t 有

$$\sum_{d \mid k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) \left\lfloor \frac{a}{k} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{k} \right\rfloor = \sum_{t=1}^{\min(a, b)} \mu(t) \left\lfloor \frac{a}{t \cdot d} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{t \cdot d} \right\rfloor$$

剩下部分数论分块即可，时间复杂度 $O(\sqrt{n})$

```
const int MAXP=5e4+5;
bool vis[MAXP];
int prime[MAXP],mu[MAXP],cnt;
void Mu(){
```

```

vis[1]=true,mu[1]=1;
_for(i,2,MAXP){
    if(!vis[i])mu[i]=-1,prime[cnt++]=i;
    for(int j=0;j<cnt&& i*prime[j]<MAXP;j++){
        vis[i*prime[j]]=true;
        if(i%prime[j])
            mu[i*prime[j]]=-mu[i];
        else{
            mu[i*prime[j]]=0;
            break;
        }
    }
}

int Ceil(int x,int y){return x%y?x/y+1:x/y;}
LL cal(int i,int n,int m,int k){
    LL ans=0;
    int lef=1,rig=0,tlef=Ceil(lef,k),trig;
    while(tlef*k<=i){
        rig=min(i,min(n/(n/lef),m/(m/lef)));
        trig=rig/k;
        if(trig>=tlef)
            ans+=1LL*(mu[trig]-mu[tlef-1])*(n/lef)*(m/lef);
        lef=rig+1;
        tlef=Ceil(lef,k);
    }
    return ans;
}

int main()
{
    Mu();
    _for(i,2,MAXP)
        mu[i]+=mu[i-1];
    int t=read_int(),a,b,d;
    while(t--){
        a=read_int(),b=read_int(),d=read_int();
        enter(cal(min(a,b),a,b,d));
    }
    return 0;
}

```

题解 2

$$\text{Ans} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b [(i,j) == d] = \sum_{d \mid i} \sum_{d \mid j} [(i,j) == d]$$

改为枚举 d 的倍数，根据 (6) 式有

$$\sum_{d \mid i} \sum_{d \mid j} [(i,j)=d] = \sum_i^{\lfloor \frac{ad}{b} \rfloor} \sum_j^{\lfloor \frac{bd}{a} \rfloor} [(i,j)=1] = \sum_i^{\lfloor \frac{ad}{b} \rfloor} \sum_j^{\lfloor \frac{bd}{a} \rfloor} \sum_{k \mid (i,j)} \mu(k)$$

考虑改变枚举顺序，有

$$\sum_i^{\lfloor \frac{ad}{b} \rfloor} \sum_j^{\lfloor \frac{bd}{a} \rfloor} \sum_{k \mid (i,j)} \mu(k) = \sum_{k=1}^{\min(\lfloor \frac{ad}{b} \rfloor, \lfloor \frac{bd}{a} \rfloor)} \sum_{k \mid i}^{\lfloor \frac{ad}{b} \rfloor} \sum_{k \mid j}^{\lfloor \frac{bd}{a} \rfloor} \mu(k) = \sum_{k=1}^{\min(\lfloor \frac{ad}{b} \rfloor, \lfloor \frac{bd}{a} \rfloor)} \lfloor \frac{ad}{b} \rfloor \lfloor \frac{bd}{a} \rfloor \frac{\lfloor \frac{ad}{b} \rfloor}{k} \frac{\lfloor \frac{bd}{a} \rfloor}{k} \mu(k)$$

剩下部分数论分块即可，时间复杂度 $O(\sqrt{n})$

```
const int MAXP=5e4+5;
bool vis[MAXP];
int prime[MAXP],mu[MAXP],cnt;
void Mu(){
    vis[1]=true,mu[1]=1;
    _for(i,2,MAXP){
        if(!vis[i])mu[i]=-1,prime[cnt++]=i;
        for(int j=0;j<cnt&&i*prime[j]<MAXP;j++){
            vis[i*prime[j]]=true;
            if(i%prime[j])
                mu[i*prime[j]]=-mu[i];
            else{
                mu[i*prime[j]]=0;
                break;
            }
        }
    }
}
LL cal(int i,int n,int m){
    LL ans=0;
    int lef=1,rig=0;
    while(lef<=i){
        rig=min(i,min(n/(n/lef),m/(m/lef)));
        ans+=1LL*(mu[rig]-mu[lef-1])*(n/lef)*(m/lef);
        lef=rig+1;
    }
    return ans;
}
int main()
{
    Mu();
    _for(i,2,MAXP)
        mu[i]+=mu[i-1];
    int t=read_int(),a,b,d;
    while(t--){
        a=read_int(),b=read_int(),d=read_int();
        a/=d,b/=d;
```

```

        enter(cal(min(a,b),a,b));
    }
    return 0;
}

```

比较题解 1 与题解 2 最后的式子，发现

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \min(a,b) \rfloor} \left\lfloor \frac{a}{k} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{\min(\lfloor \frac{a}{d} \rfloor, \lfloor \frac{b}{d} \rfloor)} \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{a}{d} \rfloor}{k} \right\rfloor \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{b}{d} \rfloor}{k} \right\rfloor \tag{10}$$

习题2

[洛谷p3327](#)

题意

给定 n, m 求 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \tau(ij)$

引理

$$\tau(ij) = \sum_{x \mid i} \sum_{y \mid j} [(x,y)=1] \tag{11}$$

证明

设 $ij = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, $i = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$ 对每个 ij 的因子 $z = p_1^{z_1} p_2^{z_2} \dots p_k^{z_k}$ 构造如下映射

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_k \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ y_1 & y_2 & \dots & y_k \end{pmatrix}, \text{ 其中 } \left\{ \begin{array}{l} x_i = z_i \leq \beta_i \\ z_i \mid y_i = z_i > \beta_i \end{array} \right. \end{pmatrix} \text{ 的映射.}$$

容易验证这是个双射，所以枚举 z 等价于枚举 $x = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$, $y = p_1^{y_1} p_2^{y_2} \dots p_k^{y_k}$, $x \mid i, y \mid j, (x,y)=1$ 证毕。

$$\text{顺便给出式子 } \varphi(ij) = \sum_{x \mid i} \sum_{y \mid j} \frac{1}{x} [(x,y)=1] \tag{12}$$

证明方法为构造如下映射

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_k \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ y_1 & y_2 & \dots & y_k \end{pmatrix}, \text{ 其中 } \left\{ \begin{array}{l} x_i = z_i \leq \beta_i \\ (\beta_i - z_i) \mid y_i = z_i > \beta_i \end{array} \right. \end{pmatrix} \text{ 的映射.}$$

容易验证这是个双射, 且 $z = \frac{iy}{x}$

题解

根据引理, 同时改变枚举顺序

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \tau(ij) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{x \mid i} \sum_{y \mid j} [(x,y)=1] = \sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^m \lfloor \frac{nx}{\text{lcm}(x,y)} \rfloor \lfloor \frac{my}{\text{lcm}(x,y)} \rfloor$$

根据 (6) 式并再次改变枚举顺序有

$$\sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^m \lfloor \frac{nx}{\text{lcm}(x,y)} \rfloor \lfloor \frac{my}{\text{lcm}(x,y)} \rfloor = \sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^m \lfloor \frac{nx}{\text{lcm}(x,y)} \rfloor \lfloor \frac{my}{\text{lcm}(x,y)} \rfloor \sum_{d=1}^{\min(n,m)} \mu(d) = \sum_{d=1}^{\min(n,m)} \sum_{x \leq n} \sum_{y \leq m} \lfloor \frac{nx}{\text{lcm}(x,y)} \rfloor \lfloor \frac{my}{\text{lcm}(x,y)} \rfloor \mu(d)$$

改为枚举倍数, 再根据 (10) 式有

$$\sum_{d=1}^{\min(n,m)} \sum_{x \leq n} \sum_{y \leq m} \lfloor \frac{nx}{\text{lcm}(x,y)} \rfloor \lfloor \frac{my}{\text{lcm}(x,y)} \rfloor \mu(d) = \sum_{d=1}^{\min(n,m)} \sum_{x=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{y=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} \lfloor \frac{nx}{\text{lcm}(x,y)} \rfloor \lfloor \frac{my}{\text{lcm}(x,y)} \rfloor \mu(d) = \sum_{d=1}^{\min(n,m)} \mu(d) \left(\sum_{x=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \lfloor \frac{nx}{\text{lcm}(x,y)} \rfloor \right) \left(\sum_{y=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} \lfloor \frac{my}{\text{lcm}(x,y)} \rfloor \right)$$

设 $f(n) = \sum_{i=1}^n \lfloor \frac{ni}{\text{lcm}(i,n)} \rfloor$ 则

$$\text{Ans} = \sum_{d=1}^{\min(n,m)} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) f\left(\frac{m}{d}\right)$$

$O(\sqrt{n})$ 时间预处理出 f 后可以 $O(\sqrt{n})$ 处理每个询问。

```
const int MAXP=5e4+5;
bool vis[MAXP];
int prime[MAXP],mu[MAXP],cnt,f[MAXP];
void Mu(){
    vis[1]=true,mu[1]=1;
    for(i,2,MAXP){
        if(!vis[i])mu[i]=-1,prime[cnt++]=i;
        for(int j=0;j<cnt&&i*prime[j]<MAXP;j++){
            vis[i*prime[j]]=true;
            if(i%prime[j])
                mu[i*prime[j]]=-mu[i];
            else{
                mu[i*prime[j]]=0;
                break;
            }
        }
    }
}
```

```
    }
}
int cal(int n){
    int lef=1,rig=0,ans=0;
    while(lef<=n){
        rig=n/(n/lef);
        ans+=(rig-lef+1)*(n/lef);
        lef=rig+1;
    }
    return ans;
}
inline LL cal(int i,int n,int m){
    int lef=1,rig=0;
    LL ans=0;
    while(lef<=i){
        rig=min(n/(n/lef),m/(m/lef));
        ans+=1LL*f[n/lef]*f[m/lef]*(mu[rig]-mu[lef-1]);
        lef=rig+1;
    }
    return ans;
}
int main()
{
    Mu();
    _for(i,2,MAXP)
        mu[i]+=mu[i-1];
    _for(i,1,MAXP)
        f[i]=cal(i);
    int t=read_int(),n,m;
    while(t--){
        n=read_int(),m=read_int();
        enter(cal(min(n,m),n,m));
    }
    return 0;
}
```

习题3

[洛谷p3704](#)

题意

共 T 组询问，每次询问 $\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m f_{\text{gcd}(i,j)} \bmod p$ 其中 f 表示斐波那契数列，且 $f_0=0, f_1=1$

题解

不妨设 $n \leq m$

首先按套路把 gcd 换成莫比乌斯函数，有

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \text{gcd}(i, j) = \prod_{d=1}^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \text{mf}_d[(i, j) == d] = \prod_{d=1}^n \text{f}_d^{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [(i, j) == d]} = \prod_{d=1}^n \text{f}_d^{\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \lfloor \frac{n}{kd} \rfloor \lfloor \frac{m}{kd} \rfloor}$$

令 $T = kd$ 有

$$\prod_{d=1}^n \text{f}_d^{\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \lfloor \frac{n}{kd} \rfloor \lfloor \frac{m}{kd} \rfloor} = \prod_{T=1}^n \left(\prod_{d \mid T} \text{f}_d^{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor \lfloor \frac{m}{T} \rfloor} \right)^{\lfloor \frac{n}{T} \rfloor \lfloor \frac{m}{T} \rfloor}$$

外部指数部分考虑数论分块。内部可以先预处理，枚举 d 对每个 $T = kd$ 计算贡献。

预处理时间复杂度 $O(n \log p + \sum_{i=1}^n \frac{n}{i}) = O(n(\log n + \log p))$ 询问的时间复杂度为 $O(\sqrt{n} \log p)$

```
const int MAXN=1e6+5,mod=1e9+7;
bool vis[MAXN];
int prime[MAXN],mu[MAXN],f[MAXN],s[MAXN],s_inv[MAXN],cnt;
int quick_pow(int a,int b){
    LL t=1;
    while(b){
        if(b&1)
            t=t*a%mod;
        a=1LL*a*a%mod;
        b>>=1;
    }
    return t%mod;
}
void Pre(){
    vis[1]=true,mu[1]=1,f[0]=0,f[1]=1;
    _for(i,2,MAXN){
        f[i]=(f[i-2]+f[i-1])%mod;
        if(!vis[i])mu[i]=-1,prime[cnt++]=i;
        for(int j=0;j<cnt&&i*prime[j]<MAXN;j++){
            vis[i*prime[j]]=true;
            if(i%prime[j])
                mu[i*prime[j]]=-mu[i];
            else{
                mu[i*prime[j]]=0;
                break;
            }
        }
    }
    _for(i,0,MAXN)
```

```
s[i]=s_inv[i]=1;
int base[3]={1,1,1},*t=base+1;
_for(i,2,MAXN){
    t[-1]=quick_pow(f[i],mod-2),t[1]=f[i];
    for(int j=1;j*i<MAXN;j++){
        s[i*j]=1LL*s[i*j]*t[mu[j]]%mod;
        s_inv[i*j]=1LL*s_inv[i*j]*t[-mu[j]]%mod;
    }
}
_for(i,2,MAXN)
s[i]=1LL*s[i]*s[i-1]%mod,s_inv[i]=1LL*s_inv[i]*s_inv[i-1]%mod;
}
int cal(int n,int m){
    int lef=1,rig;
    LL ans=1;
    while(lef<=n){
        rig=min(n/(n/lef),m/(m/lef));
        ans=ans*quick_pow(1LL*s[rig]*s_inv[lef-1]%mod,1LL*(n/lef)*(m/lef)%(mod-1))%mod;
        lef=rig+1;
    }
    return (ans+mod)%mod;
}
int main()
{
    int t=read_int(),n,m;
    Pre();
    while(t--){
        n=read_int(),m=read_int();
        enter(cal(min(n,m),max(n,m)));
    }
    return 0;
}
```

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E6%95%B0%E8%AE%BA_2

Last update: 2020/07/27 22:56