

# 数论 2

## 前置公式

$$\left(\sum_{d|n} f(x)\right) \left(\sum_{d|m} g(x)\right) = \sum_{d_1|n} \sum_{d_2|m} f(d_1)g(d_2) \tag{1}$$

$$\sum_{m=1}^n \sum_{d|(n,m)} f(d) = \sum_{d|n} f(d) \frac{n}{d} \tag{2}$$

$$\sum_{x|n} \left(f(x) \sum_{y|\frac{n}{x}} g(y)\right) = \sum_{y|n} \left(g(y) \sum_{x|\frac{n}{y}} f(x)\right) \tag{3}$$

## 可积函数

### 一般可积函数

#### 定义

数论函数  $\theta$  被定义为可积函数，若

$$(a) \exists n \left(\theta(n) \neq 0\right)$$

$$(b) \forall n \forall m \left((n,m)=1 \rightarrow \theta(n) \theta(m) = \theta(nm)\right)$$

#### 性质

假定  $\theta$  为可积函数，则

$$\begin{array}{l} (1) \theta(1) = 1 \\ (2) \theta(n) = \theta\left(p_1^{\alpha_1}\right) \theta\left(p_2^{\alpha_2}\right) \dots \theta\left(p_k^{\alpha_k}\right) \\ (3) \theta_1, \theta_2 \text{ 可积} \rightarrow \theta_1 \theta_2 \text{ 可积} \end{array}$$

#### 定理

若  $\theta$  为可积函数，则

$$\begin{array}{l} (1) \psi(n) = \sum_{d|n} \theta(d) \text{ 可积} \\ (2) \psi(n) = \prod_{i=1}^k \left(1 + \theta\left(p_i\right) + \theta\left(p_i^2\right) + \dots + \theta\left(p_i^{\alpha_i}\right)\right) \end{array}$$

#### 证明

设  $(n,m)=1$  则对  $d \mid nm$  一定存在唯一  $d_1 \mid n, d_2 \mid m, d = d_1 d_2$

同时, 对每对  $d_1 \mid n, d_2 \mid m$  一定有  $d = d_1 d_2 \mid nm$

所以根据 (1) 式

$$\begin{aligned} \psi(nm) &= \sum_{d \mid nm} \theta(d) = \sum_{d_1 \mid n} \sum_{d_2 \mid m} \theta(d_1) \theta(d_2) \\ &= \left( \sum_{d \mid n} \theta(d) \right) \left( \sum_{d \mid m} \theta(d) \right) = \psi(n) \psi(m) \end{aligned}$$

$$\psi(n) = \prod_{i=1}^k \psi(p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^k \left( 1 + \theta(p_i) + \theta(p_i^2) + \dots + \theta(p_i^{\alpha_i}) \right)$$

## 莫比乌斯函数

定义

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ (-1)^k & n=p_1 p_2 \dots p_k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

性质

若  $\theta$  为可积函数, 根据 (4) 式

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) \theta(d) = \prod_{i=1}^k \left( 1 + \mu(p_i) \theta(p_i) + \mu(p_i^2) \theta(p_i^2) + \dots + \mu(p_i^{\alpha_i}) \theta(p_i^{\alpha_i}) \right) = \prod_{i=1}^k \left( 1 - \theta(p_i) \right)$$

特别地

$$\theta(n) \equiv 1, \sum_{d \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\theta(n) = \frac{1}{\sum_{d \mid n} \mu(d)} \quad d = (1-p_1)(1-p_2)\dots(1-p_k)$$

## 欧拉函数

定义

$$\varphi(n) = \sum_{m=1}^n [(n,m)=1]$$

性质

根据 (2) 式、(6) 式和 (7) 式

$$\varphi(n) = \sum_{m=1}^n [(n,m)=1] = \sum_{m=1}^n \sum_{d \mid (n,m)} \mu(d) = n \sum_{d \mid n} \frac{\mu(d)}{d} = n(1-p_1)(1-p_2)\dots(1-p_k)$$

## 其他常见可积函数

$$\tau(n) = \sum_{d \mid n} 1 = \prod_{i=1}^k (\alpha_k + 1)$$

$$\sigma(n) = \sum_{d \mid n} d = \prod_{i=1}^k \left( 1 + p_k + p_k^2 + \dots + p_k^{\alpha_k} \right)$$

## 完全积性函数

$f(x)$  被定义为完全积性函数若  $\forall n \forall m (f(nm) = f(n)f(m))$

$$e(n) = [n=1]$$

$$I(n) = 1$$

$$id(n) = n$$

## 线性筛法

先给出线性筛素数的代码

```
const int MAXP=1e6;
bool vis[MAXP];
int prime[MAXP],cnt;
void Prime(){
    vis[1]=true;
    for(i,2,MAXP){
        if(!vis[i]) prime[cnt++]=i;
        for(int j=0;j<cnt&& i*prime[j]<MAXP;j++){
            vis[i*prime[j]]=true;
            if(i%prime[j]==0) break;
        }
    }
}
```

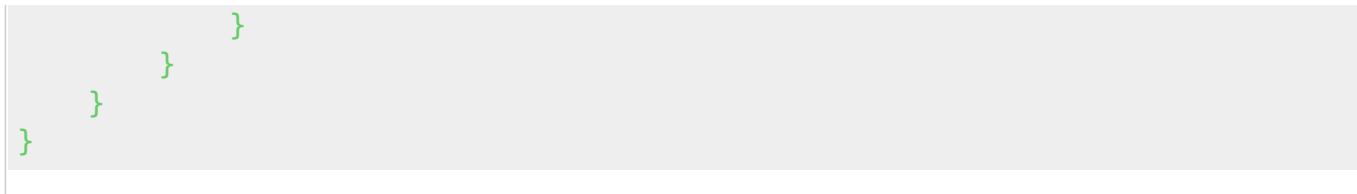
基于线性筛素数和可积函数性质，如果能在  $O(1)$  时间求出  $f(p^k)$  就可以线性筛  $f$  函数，例如

```
const int MAXP=1e6;
bool vis[MAXP];
int prime[MAXP],mu[MAXP],cnt;
void Mu(){
```

```
vis[1]=true,mu[1]=1;
_for(i,2,MAXP){
    if(!vis[i])mu[i]=-1,prime[cnt++]=i;
    for(int j=0;j<cnt&& i*prime[j]<MAXP;j++){
        vis[i*prime[j]]=true;
        if(i%prime[j])
            mu[i*prime[j]]=-mu[i];
        else{
            mu[i*prime[j]]=0;
            break;
        }
    }
}
```

```
const int MAXP=1e6;
bool vis[MAXP];
int prime[MAXP],phi[MAXP],cnt;
void Phi(){
    vis[1]=true,phi[1]=1;
    _for(i,2,MAXP){
        if(!vis[i])phi[i]=i-1,prime[cnt++]=i;
        for(int j=0;j<cnt&&prime[j]*i<MAXP;j++){
            vis[i*prime[j]]=true;
            if(i%prime[j])
                phi[i*prime[j]]=phi[i]*(prime[j]-1);
            else{
                phi[i*prime[j]]=phi[i]*prime[j];
                break;
            }
        }
    }
}
```

```
const int MAXP=1e6;
bool vis[MAXP];
int prime[MAXP],tau[MAXP],mpow[MAXP],cnt;
void Tau(){
    vis[1]=true,tau[1]=1;
    _for(i,2,MAXP){
        if(!vis[i])tau[i]=2,mpow[i]=1,prime[cnt++]=i;
        for(int j=0;j<cnt&&prime[j]*i<MAXP;j++){
            vis[i*prime[j]]=true;
            if(i%prime[j])
                tau[i*prime[j]]=tau[i]<<1,mpow[i*prime[j]]=1;
            else{
                tau[i*prime[j]]=tau[i]/(mpow[i]+1)*(mpow[i]+2),mpow[i*prime[j]]=mpow[i]+1;
                break;
            }
        }
    }
}
```



简单地说，

$$f(ip) = \begin{cases} f(i)f(p) & \text{不是 } p \text{ 的最小素因子} \\ f(p^{k+1}) & \text{是 } p \text{ 的最小素因子} \end{cases}$$

如有必要，额外存储每个数的最小素因子的幂次即可。

## 狄利克雷卷积

### 定义

两个数论函数  $f, g$  的狄利克雷卷积运算为  $(f \ast g)(n) = \sum_{d \mid n} f(d)g(\frac{n}{d})$

### 性质

- 1、交换律  $f \ast g = g \ast f$
- 2、结合律  $f \ast (g \ast h) = (f \ast g) \ast h$
- 3、分配律  $(f+g) \ast h = f \ast h + g \ast h$
- 4、单位元  $e \ast f = f$
- 5、逆元：对每个  $f(1) \neq 0$  的数论函数  $f$  一定存在某个数论函数  $g$  使得  $f \ast g = e$
- 6、两个可积函数的狄利克雷卷积仍为可积函数，可积函数的逆元也为可积函数。

### 性质 5 证明

事实上，构造  $g(n) = \frac{1}{f(1)} \left( e(n) - \sum_{d \mid n, d \neq 1} f(d) \ast g(\frac{n}{d}) \right)$

知  $g(n)$  可由  $g(1 \sim n-1)$  递推得到，且  $\sum_{d \mid n} f(d) \ast g(\frac{n}{d}) = f(1) \ast g(n) + \sum_{d \mid n, d \neq 1} f(d) \ast g(\frac{n}{d}) = e(n)$

### 莫比乌斯反演定理

设  $F(x) \neq 0$  为数论函数  $F(n) = \sum_{d \mid n} f(d) \iff f(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) F(\frac{n}{d})$

该定理的另一种形式为 
$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) \iff f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F(d)$$

事实上，该定理等价于若  $F = f * 1$  则  $f = F * \mu$ 。简单地说，莫比乌斯反演定理即证明  $e = 1 * \mu$

## 证明

根据 (3) 式和 (6) 式

$$\sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \left( \mu(d) \sum_{d_1|n/d} f(d_1) \right) = \sum_{d_1|n} \left( f(d_1) \sum_{d|n/d_1} \mu(d) \right) = f(n)$$

## 一些常见的狄利克雷卷积

1  $1 * \mu = e$

2  $\mu * \text{id} = \varphi$

3  $1 * \text{id} = \sigma$

4  $1 * 1 = \tau$

5  $1 * \varphi = \text{id}$

6  $\tau * \varphi = \sigma$

## 证明 1

莫比乌斯反演定理已证明。

## 证明 2

欧拉函数性质推导过程已证明。

## 证明 3

根据定义。

## 证明 4

根据定义。

## 证明 5

根据前面结论  $\varphi(\mu \text{id}) = (\mu) \text{id} = \text{id}$

## 证明 6

根据前面结论  $\tau \varphi = (\text{id}) \mu \text{id} = (\mu) \text{id} = \text{id}$

## 算法练习

## 习题 1

[洛谷 p3455](#)

## 题意

给定  $a, b, d$  求满足  $x \leq a, y \leq b, (x, y) = d$  的二元组。

## 题解 1

在约束条件  $x \leq a, y \leq b$  下，设  $f(n)$  为满足  $(i, j) = n$  的二元组个数  $F(n)$  为满足  $n \mid (i, j)$  的二元组个数。

$$f(n) = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b [(i, j) = n]$$

$$F(n) = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b [n \mid (i, j)] = \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{n} \right\rfloor$$

根据莫比乌斯反演定理，有

$$Ans = f(d) = \sum_{d \mid k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) F(k) = \sum_{d \mid k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) \left\lfloor \frac{a}{k} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{k} \right\rfloor$$

设  $k = td$  改为枚举  $t$  有

$$\sum_{d \mid k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) \left\lfloor \frac{a}{k} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{k} \right\rfloor = \sum_{t=1}^{\min(a, b)} \mu(t) \left\lfloor \frac{a}{td} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{td} \right\rfloor$$

剩下部分数论分块即可，时间复杂度  $O\left(\max\left(\sqrt{a}, \sqrt{b}\right)\right)$

```
#include <cstdio>
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>
```

```
#include <cstring>
#include <cctype>
#include <queue>
#include <cmath>
#define _for(i,a,b) for(int i=(a);i<(b);++i)
#define _rep(i,a,b) for(int i=(a);i<=(b);++i)
#define mem(a,b) memset((a),(b),sizeof(a))
using namespace std;
typedef long long LL;
inline int read_int(){
    int t=0;bool sign=false;char c=getchar();
    while(!isdigit(c)){sign|=c=='-';c=getchar();}
    while(isdigit(c)){t=(t<<1)+(t<<3)+(c&15);c=getchar();}
    return sign?-t:t;
}
inline LL read_LL(){
    LL t=0;bool sign=false;char c=getchar();
    while(!isdigit(c)){sign|=c=='-';c=getchar();}
    while(isdigit(c)){t=(t<<1)+(t<<3)+(c&15);c=getchar();}
    return sign?-t:t;
}
inline void write(LL x){
    register char c[21],len=0;
    if(!x)return putchar('0'),void();
    if(x<0)x=-x,putchar('-');
    while(x)c[++len]=x%10,x/=10;
    while(len)putchar(c[len--]+48);
}
inline void space(LL x){write(x),putchar(' ');}
inline void enter(LL x){write(x),putchar('\n');}
const int MAXP=5e4+5;
bool vis[MAXP];
int prime[MAXP],mu[MAXP],cnt;
void Mu(){
    vis[1]=true,mu[1]=1;
    _for(i,2,MAXP){
        if(!vis[i])mu[i]=-1,prime[cnt++]=i;
        for(int j=0;j<cnt&&i*prime[j]<MAXP;j++){
            vis[i*prime[j]]=true;
            if(i%prime[j])
                mu[i*prime[j]]=-mu[i];
            else{
                mu[i*prime[j]]=0;
                break;
            }
        }
    }
}
int Ceil(int x,int y){return x%y?x/y+1:x/y;}
LL cal(int i,int n,int m,int k){
```

```

LL ans=0;
int lef=1,rig=0,tlef=Ceil(lef,k),trig;
while(tlef*k<=i){
    rig=min(i,min(n/(n/lef),m/(m/lef)));
    trig=rig/k;
    if(trig>=tlef)
        ans+=1LL*(mu[trig]-mu[tlef-1])*(n/lef)*(m/lef);
    lef=rig+1;
    tlef=Ceil(lef,k);
}
return ans;
}
int main()
{
    Mu();
    _for(i,2,MAXP)
        mu[i]+=mu[i-1];
    int t=read_int(),a,b,d;
    while(t--){
        a=read_int(),b=read_int(),d=read_int();
        enter(cal(min(a,b),a,b,d));
    }
    return 0;
}

```

## 题解 2

$$\text{Ans} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b [(i,j) = d] = \sum_{d \mid i} \sum_{d \mid j} [(i,j) = d]$$

改为枚举  $d$  的倍数，根据 (6) 式有

$$\sum_{d \mid i} \sum_{d \mid j} [(i,j) = d] = \sum_i^{\lfloor \frac{a}{d} \rfloor} \sum_j^{\lfloor \frac{bd}{d} \rfloor} [(i,j) = 1] = \sum_i^{\lfloor \frac{a}{d} \rfloor} \sum_j^{\lfloor \frac{bd}{d} \rfloor} \sum_{k \mid (i,j)} \mu(k)$$

考虑改变枚举顺序，有

$$\sum_i^{\lfloor \frac{a}{d} \rfloor} \sum_j^{\lfloor \frac{bd}{d} \rfloor} \sum_{k \mid (i,j)} \mu(k) = \sum_{k=1}^{\min(\lfloor \frac{a}{d} \rfloor, \lfloor \frac{bd}{d} \rfloor)} \sum_{k \mid i}^{\lfloor \frac{a}{k} \rfloor} \sum_{k \mid j}^{\lfloor \frac{bd}{k} \rfloor} \mu(k) = \sum_{k=1}^{\min(\lfloor \frac{a}{d} \rfloor, \lfloor \frac{bd}{d} \rfloor)} \lfloor \frac{a}{k} \rfloor \lfloor \frac{bd}{k} \rfloor \mu(k)$$

剩下部分数论分块即可，时间复杂度  $O(\max(\sqrt{a}, \sqrt{b}))$

```

#include <cstdio>
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>

```

```
#include <cstring>
#include <cctype>
#include <queue>
#include <cmath>
#define _for(i,a,b) for(int i=(a);i<(b);++i)
#define _rep(i,a,b) for(int i=(a);i<=(b);++i)
#define mem(a,b) memset((a),(b),sizeof(a))
using namespace std;
typedef long long LL;
inline int read_int(){
    int t=0;bool sign=false;char c=getchar();
    while(!isdigit(c)){sign|=c=='-';c=getchar();}
    while(isdigit(c)){t=(t<<1)+(t<<3)+(c&15);c=getchar();}
    return sign?-t:t;
}
inline LL read_LL(){
    LL t=0;bool sign=false;char c=getchar();
    while(!isdigit(c)){sign|=c=='-';c=getchar();}
    while(isdigit(c)){t=(t<<1)+(t<<3)+(c&15);c=getchar();}
    return sign?-t:t;
}
inline void write(LL x){
    register char c[21],len=0;
    if(!x)return putchar('0'),void();
    if(x<0)x=-x,putchar('-');
    while(x)c[++len]=x%10,x/=10;
    while(len)putchar(c[len--]+48);
}
inline void space(LL x){write(x),putchar(' ');}
inline void enter(LL x){write(x),putchar('\n');}
const int MAXP=5e4+5;
bool vis[MAXP];
int prime[MAXP],mu[MAXP],cnt;
void Mu(){
    vis[1]=true,mu[1]=1;
    _for(i,2,MAXP){
        if(!vis[i])mu[i]=-1,prime[cnt++]=i;
        for(int j=0;j<cnt&&i*prime[j]<MAXP;j++){
            vis[i*prime[j]]=true;
            if(i%prime[j])
                mu[i*prime[j]]=-mu[i];
            else{
                mu[i*prime[j]]=0;
                break;
            }
        }
    }
}
LL cal(int i,int n,int m){
    LL ans=0;
```

```

int lef=1,rig=0;
while(lef<=i){
    rig=min(i,min(n/(n/lef),m/(m/lef)));
    ans+=1LL*(mu[rig]-mu[lef-1])*(n/lef)*(m/lef);
    lef=rig+1;
}
return ans;
}
int main()
{
    Mu();
    _for(i,2,MAXP)
        mu[i]+=mu[i-1];
    int t=read_int(),a,b,d;
    while(t--){
        a=read_int(),b=read_int(),d=read_int();
        a/=d,b/=d;
        enter(cal(min(a,b),a,b));
    }
    return 0;
}

```

比较题解 1 与题解 2 最后的式子，发现

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{a}{d} \rfloor} \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{b}{d} \rfloor} \tau(kl) = \sum_{k=1}^{\min(\lfloor \frac{a}{d} \rfloor, \lfloor \frac{b}{d} \rfloor)} \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{a}{d} \rfloor} \tau(kl) \tag{10}$$

## 习题2

[洛谷p3327](#)

### 题意

给定  $n, m$  求  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \tau(ij)$

### 引理

$$\tau(ij) = \sum_{x \mid i} \sum_{y \mid j} [(x, y) = 1] \tag{11}$$

### 证明

设  $ij = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ ,  $i = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$  对每个  $ij$  的因子  $z = p_1^{z_1} p_2^{z_2} \dots p_k^{z_k}$  构造如下映射

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ y_1 & y_2 & \dots & y_k \end{matrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \begin{matrix} x_i = [z_i \leq \beta_i] \\ y_i = [z_i > \beta_i] \\ z_i - \beta_i \end{matrix}$$

容易验证这是个双射，所以枚举  $z$  等价于枚举  $x = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}, y = p_1^{y_1} p_2^{y_2} \dots p_k^{y_k}, x \mid i, y \mid j, (x, y) = 1$  证毕。

## 题解

根据引理，同时改变枚举顺序

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \tau(ij) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{x \mid i} \sum_{y \mid j} [(x, y) = 1] = \sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^m \lfloor \frac{nx}{y} \rfloor \lfloor \frac{my}{x} \rfloor [(x, y) = 1]$$

根据 (6) 式并再次改变枚举顺序有

$$\sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^m \lfloor \frac{nx}{y} \rfloor \lfloor \frac{my}{x} \rfloor [(x, y) = 1] = \sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^m \lfloor \frac{nx}{y} \rfloor \lfloor \frac{my}{x} \rfloor \sum_{d=1}^{\min(n, m)} \mu(d) \sum_{x \mid d} \sum_{y \mid \frac{m}{d}} \lfloor \frac{nx}{y} \rfloor \lfloor \frac{my}{x} \rfloor \mu(d)$$

改为枚举倍数，再根据 (10) 式有

$$\sum_{d=1}^{\min(n, m)} \sum_{x \mid d} \sum_{y \mid \frac{m}{d}} \lfloor \frac{nx}{y} \rfloor \lfloor \frac{my}{x} \rfloor \mu(d) = \sum_{d=1}^{\min(n, m)} \sum_{x=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{y=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} \lfloor \frac{nx}{y} \rfloor \lfloor \frac{my}{x} \rfloor \mu(d) \left( \sum_{x=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \lfloor \frac{nx}{y} \rfloor \right) \left( \sum_{y=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} \lfloor \frac{my}{x} \rfloor \right)$$

设  $f(n) = \sum_{i=1}^n \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$  则

$$\text{Ans} = \sum_{d=1}^{\min(n, m)} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) f\left(\frac{m}{d}\right)$$

$O(\sqrt{n})$  时间预处理出  $f$  后可以  $O(\sqrt{n})$  处理每个询问。

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:jxm2001:%E6%95%B0%E8%AE%BA\\_2&rev=1593868720](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E6%95%B0%E8%AE%BA_2&rev=1593868720)

Last update: 2020/07/04 21:18