

数论 3

杜教筛

算法简介

一种 $O(\left\lfloor n^{\frac{2}{3}} \right\rfloor)$ 计算积性函数前缀和的算法。

算法思路

设 $f \circ g$ 为积性函数 $S(n) = \sum_{i=1}^n f(i)$ 考虑 $f \circ g$ 的狄利克雷卷积的前缀和

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (f \circ g)(i) &= \sum_{i=1}^n \sum_{d \mid i} f\left(\frac{id}{g(d)}\right) \\ &= \sum_{d=1}^n \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} f(k) = \sum_{d=1}^n g(d)S(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor) \end{aligned}$$

所以有

$$\sum_{i=1}^n (f \circ g)(i) = g(1)S(n) + \sum_{d=2}^n g(d)S(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor)$$

变形得

$$g(1)S(n) = \sum_{i=1}^n (f \circ g)(i) - \sum_{d=2}^n g(d)S(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor)$$

观察式子，发现如果能快速求出 $(f \circ g)(n)$ 和 $g(n)$ 的前缀和，就可以通过整数分块和记忆化搜索快速求出 $S(n)$

复杂度证明

下面假设 $(f \circ g)(n)$ 和 $g(n)$ 的前缀和可以 $O(1)$ 求出。

若要求出 $S(n)$ 需要先求出 $S(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor)$ ($d=1 \sim n$)

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E6%95%B0%E8%AE%BA_3&rev=1594299468

Last update: 2020/07/09 20:57

