

数论 3

杜教筛

算法简介

一种 $O\left(n^{\frac{2}{3}}\right)$ 计算积性函数前缀和的算法。

算法思路

设 f, g 为积性函数 $S(n) = \sum_{i=1}^n f(i)$ 考虑 f, g 的狄利克雷卷积的前缀和

$$\sum_{i=1}^n (f * g)(i) = \sum_{i=1}^n \sum_{d \mid i} f\left(\frac{id}{d}\right) g(d) = \sum_{d=1}^n \left(g(d) \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} f(k) \right) = \sum_{d=1}^n g(d) S\left(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor\right)$$

所以有

$$\sum_{i=1}^n (f * g)(i) = g(1)S(n) + \sum_{d=2}^n g(d) S\left(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor\right)$$

变形得

$$g(1)S(n) = \sum_{i=1}^n (f * g)(i) - \sum_{d=2}^n g(d) S\left(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor\right)$$

观察式子，发现如果能快速求出 $(f * g)(n)$ 和 $g(n)$ 的前缀和，就可以通过整数分块和记忆化搜索快速求出 $S(n)$

复杂度证明

下面假设 $(f * g)(n)$ 和 $g(n)$ 的前缀和可以 $O(1)$ 求出。

若要求出 $S(n)$ 需要先求出 $S(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor) (d=1 \sim n)$

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E6%95%B0%E8%AE%BA_3&rev=1594299468

Last update: 2020/07/09 20:57