

# 数论 4

## Min\_25筛

### 算法简介

一种  $O\left(\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\log n}\right)$  计算积性函数  $F(x)$  前缀和的算法。

### 算法思路

首先给定  $\text{Min}_{25}$  筛的适用条件  $F(p)$  的值可以拆分为若干个完全积性函数，且  $F(p^k)$  可以快速计算。

设  $\text{mdiv}(x)$  表示  $x$  的最小素因子。将所有素数从小到大排列，记为  $p_1, p_2, p_3 \dots$

考虑构造完全积性函数  $f(x)$  满足  $f(p) = F(p)$  设  $g(n, k) = \sum_{i=1}^n [\text{mdiv}(i) > p_k \text{ or } i \in \{\text{prime}\}] f(i)$

考虑从  $g(n, k-1)$  转移到  $g(n, k)$  等价于减去  $\text{mdiv}(i) = p_k$  且  $i \notin \{\text{prime}\}$  的  $f(i)$  的贡献。如果  $p_k^2 \geq n$  则这样的数不存在。

否则将所有满足该条件的  $i$  提取出一个  $p_k$  记  $i' = \frac{i}{p_k}$  于是  $\text{mdiv}(i') \geq p_k, f(i) = \frac{f(i')}{f(p_k)}$

考虑减去  $f(p_k)g(\lfloor \frac{n}{p_k} \rfloor, k-1)$  发现  $g(\lfloor \frac{n}{p_k} \rfloor, k-1)$  多包含了  $\sum_{i=1}^{k-1} f(p_i)$  于是再补上。

于是有状态转移方程

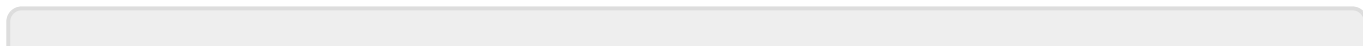
$$g(n, k) = \begin{cases} g(n, k-1), & p_k^2 \geq n \\ g(n, k-1) - f(p_k)g(\lfloor \frac{n}{p_k} \rfloor, k-1) - \sum_{i=1}^{k-1} f(p_i), & p_k^2 < n \end{cases}$$

由于  $\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{a} \rfloor}{b} \rfloor = \lfloor \frac{n}{ab} \rfloor$  于是  $g(a, b)$  中的  $a$  只有  $O(\sqrt{n})$  个。

使用刷表法暴力转移上述方程直到  $p_{k+1}^2 > n$  此时有  $g(n, k) = \sum_{i=1}^n [i \in \{\text{prime}\}] f(i)$

### 复杂度证明

### 算法练习



From:  
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:  
[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:jxm2001:%E6%95%B0%E8%AE%BA\\_4&rev=1600686561](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E6%95%B0%E8%AE%BA_4&rev=1600686561) 

Last update: **2020/09/21 19:09**