

数论 4

Min_25筛

算法简介

一种 $O(\left(\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\log n}\right) \log n)$ 计算积性函数 $F(x)$ 前缀和的算法。

算法思路

首先给定 Min_25 筛的适用条件 $F(p)$ 的值可以拆分为若干个完全积性函数，且 $F(p^k)$ 可以快速计算。

设 $\text{mdiv}(x)$ 表示 x 的最小素因子。将所有素数从小到大排列，记为 p_1, p_2, p_3, \dots

考虑构造完全积性函数 $f(x)$ 满足 $f(p) = F(p)$ 设 $g(n, k) = \sum_{i=1}^n \text{mdiv}(i)^{k-1} f(i)$

考虑从 $g(n, k-1)$ 转移到 $g(n, k)$ 等价于减去 $\text{mdiv}(i) = p_k$ 且 $i \not\in \text{prime}$ 的 $f(i)$ 的贡献。如果 $p_k^{k-2} \geq n$ 则这样的数不存在。

否则将所有满足该条件的 i 提取出一个 p_k 记 $i' = \frac{i}{p_k}$ 于是 $\text{mdiv}(i') \geq p_k, f(i') = \frac{f(i)}{f(p_k)}$

考虑减去 $f(p_k) g(\lfloor \frac{n/p_k}{k-1} \rfloor)$ 发现 $g(\lfloor \frac{n/p_k}{k-1} \rfloor)$ 多包含了 $\sum_{i=1}^{k-1} f(p_i)$ 于是再补上。

于是有状态转移方程

$$\begin{cases} g(n, k-1), & p_k^2 \geq n \\ g(n, k-1) - f(p_k) (g(\lfloor \frac{n/p_k}{k-1} \rfloor) - \sum_{i=1}^{k-1} f(p_i)), & p_k^2 < n \end{cases}$$

由于 $\lfloor \frac{na}{b} \rfloor = \lfloor \frac{n}{\lfloor a/b \rfloor} \rfloor$ 于是 $g(a, b)$ 中的 a 只有 $O(\sqrt{n})$ 个。

使用刷表法暴力转移上述方程直到 $p_{k+1}^2 > n$ 此时有 $g(n, k) = \sum_{i=1}^n f(i)$

复杂度证明

算法练习

Last update: 2020-2021:teams:legal_string:jxm2001: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E6%95%B0%E8%AE%BA_4&rev=1600686561
2020/09/21 19:09
数论_4

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E6%95%B0%E8%AE%BA_4&rev=1600686561

Last update: 2020/09/21 19:09

