

数论 4

Min_25筛

算法简介

一种 $O\left(\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\log n}\right)$ 计算积性函数 $F(x)$ 前缀和的算法。

算法思路

首先给定 Min_{25} 筛的适用条件 $F(p)$ 的值可以拆分为若干个完全积性函数，且 $F(p^k)$ 可以快速计算。

设 $\text{mdiv}(x)$ 表示 x 的最小素因子。将所有素数从小到大排列，记为 $p_1, p_2, p_3 \dots$

考虑构造完全积性函数 $f(x)$ 满足 $f(p) = F(p)$ 设 $g(n, k) = \sum_{i=1}^n [\text{mdiv}(i) > p_k \text{ or } i \in \{\text{prime}\}] f(i)$

考虑从 $g(n, k-1)$ 转移到 $g(n, k)$ 等价于减去 $\text{mdiv}(i) = p_k$ 且 $i \notin \{\text{prime}\}$ 的 $f(i)$ 的贡献。如果 $p_k^2 \geq n$ 则这样的数不存在。

否则将所有满足该条件的 i 提取出一个 p_k 记 $i' = \frac{i}{p_k}$ 于是 $\text{mdiv}(i') \geq p_k, f(i) = \frac{f(i')}{f(p_k)}$

考虑减去 $f(p_k)g(\lfloor \frac{n}{p_k} \rfloor, k-1)$ 发现 $g(\lfloor \frac{n}{p_k} \rfloor, k-1)$ 多包含了 $\sum_{i=1}^{k-1} f(p_i)$ 于是再补上。

于是有状态转移方程

$$g(n, k) = \begin{cases} g(n, k-1), & p_k^2 \geq n \\ g(n, k-1) - f(p_k)g(\lfloor \frac{n}{p_k} \rfloor, k-1) - \sum_{i=1}^{k-1} f(p_i), & p_k^2 < n \end{cases}$$

由于 $\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{a} \rfloor}{b} \rfloor = \lfloor \frac{n}{ab} \rfloor$ 于是 $g(a, b)$ 中的 a 只有 $O(\sqrt{n})$ 个。

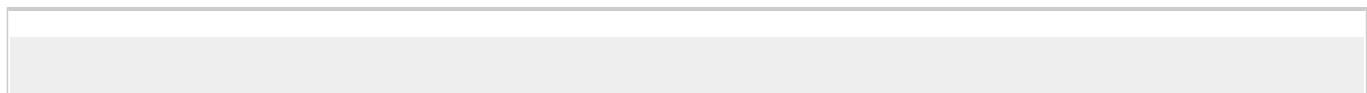
使用刷表法暴力转移上述方程直到 $p_{k+1}^2 > n$ 此时得到 $g(a, k) = \sum_{i=1}^a [i \in \{\text{prime}\}] f(i) = \sum_{i=1}^a [i \in \{\text{prime}\}] F(i), a \in \lfloor \frac{n}{p_k} \rfloor$

由于玄学因素，时间复杂度为 $O\left(\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\log n}\right)$

接下来设 $S(n, k) = \sum_{i=1}^n [\text{mdiv}(i) > p_k] F(i)$ 于是目标就是求 $S(n, 0) + F(1)$

复杂度证明

算法练习



From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - **CVBB ACM Team**

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E6%95%B0%E8%AE%BA_4&rev=1600687592 

Last update: **2020/09/21 19:26**