数论 5

卢卡斯定理

算法简介

$O(p+\log_pn)$ 计算 ${n\choose m}\bmod p$ 的算法，p 为素数。

算法实现

$${p\choose i}=\frac pi{p-1\choose i-1}$$

于是对 $1\le i\le p-1$，有 ${p\choose i}\equiv 0\pmod p$，

$$(1+x)^p\equiv {p\choose 0}+{p\choose 1}x+\cdots +{p\choose p}x^p\equiv 1+x^p\pmod p$$

对 ${n\choose m}$，不妨设 $n=k_1p+r_1,m=k_2p+r_2$，于是有

$$(1+x)^n\equiv (1+x)^{k_1p+r_1}\equiv ((1+x)^p)^{k_1}(1+x)^{r_1}\equiv (1+x^p)^{k_1}(1+x)^{r_1}\pmod p$$

对比左右两边 x_m 的系数，有

$${n\choose m}\equiv {k_1\choose k_2}{r_1\choose r_2}\pmod p$$

于是递归处理，有

$$\text{Lucas}(n,m)\equiv \text{Lucas}(\lfloor \frac np\rfloor,\lfloor \frac mp\rfloor){n\bmod p\choose m\bmod p}$$

代码模板

洛谷p3807

```
const int MAXN=1e5+5;
int frac[MAXN],invfrac[MAXN];
int quick_pow(int a,int b,int p){
    int ans=1;
    while(b){
        if(b&1)ans=1LL*ans*a%p;
        a=1LL*a*a%p;
        b>>=1;
    }
    return ans;
}
int Lucas(int n,int m,int p){
```

```
    if(n<m)return 0;
    else if(n<p)return 1LL*frac[n]*invfrac[n-m]%p*invfrac[m]%p;
    else return 1LL*Lucas(n%p,m%p,p)*Lucas(n/p,m/p,p)%p;
}
int main()
{
    int T=read_int();
    while(T--){
        int n=read_int(),m=read_int(),p=read_int();
        frac[0]=1;
        _for(i,1,p)frac[i]=1LL*frac[i-1]*i%p;
        invfrac[p-1]=quick_pow(frac[p-1],p-2,p);
        for(int i=p-1;i;i--)
        invfrac[i-1]=1LL*invfrac[i]*i%p;
        enter(Lucas(n+m,n,p));
    }
    return 0;
}
```

拓展卢卡斯

算法简介

$O(\sum p_i^k+\sum \log_{p_i^k}n)$ 计算 ${n\choose m}\bmod p$ 的算法，其中 $p=\prod p_i^k$

算法实现