

斯特林数

第一类斯特林数

定义

第一类斯特林数 $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ 表示将 n 个不同元素构成 m 个圆排列的数目。

性质一

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} + (n-1) \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} \tag{1}$$

考虑新加入的数 n 要么单独成环，要么插入到其他环中，其中插入方式有 $n-1$ 种。

性质二

$$x^{\overline{n}} = \sum_{i=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} x^i \tag{2}$$

其中 $x^{\overline{n}}$ 表示上升幂。

考虑归纳证明，有

$$x^{\overline{n+1}} = x^{\overline{n}}(x+n) = (x+n) \sum_{i=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} x^i = \sum_{i=0}^{n+1} \left(\begin{Bmatrix} n \\ i-1 \end{Bmatrix} + n \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} \right) x^i = \sum_{i=0}^{n+1} \begin{Bmatrix} n+1 \\ i \end{Bmatrix} x^i$$

性质三

$$x^{\underline{n}} = \sum_{i=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} (-1)^{n-i} x^i \tag{3}$$

其中 $x^{\underline{n}}$ 表示下降幂。

考虑归纳证明，有

$$x^{\underline{n+1}} = x^{\underline{n}}(x-n) = (x-n) \sum_{i=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} (-1)^{n-i} x^i = \sum_{i=0}^{n+1} \left(-\begin{Bmatrix} n \\ i-1 \end{Bmatrix} - n \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} \right) (-1)^{n-i} x^i = \sum_{i=0}^{n+1} \begin{Bmatrix} n+1 \\ i \end{Bmatrix} (-1)^{n+1-i} x^i$$

运算

第一类斯特林数 \cdot 行

洛谷p5408

$$\begin{matrix} n \\ i \end{matrix} (0 \leq i \leq n)$$



From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E6%96%AF%E7%89%B9%E6%9E%97%E6%95%B0&rev=1598015923

Last update: 2020/08/21 21:18