

# 斯特林数

## 第一类斯特林数

### 定义

第一类斯特林数  $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$  表示将  $n$  个不同元素构成  $m$  个圆排列的数目。

### 性质一

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} + (n-1) \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}$$

考虑新加入的数  $n$  要么单独成环，要么插入到其他环中，其中插入方式有  $n-1$  种。

### 性质二

$$\overline{x^n} = \sum_{i=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} x^i$$

其中  $\overline{x^n}$  表示上升幂。

考虑归纳证明，有

$$\overline{x^{n+1}} = \overline{x^n} (x+n) = (x+n) \sum_{i=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} x^i = \sum_{i=0}^{n+1} \left( \begin{Bmatrix} n \\ i-1 \end{Bmatrix} + n \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} \right) x^i = \sum_{i=0}^{n+1} \begin{Bmatrix} n+1 \\ i \end{Bmatrix} x^i$$

### 性质三

$$\underline{x^n} = \sum_{i=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} (-1)^{n-i} x^i$$

其中  $\underline{x^n}$  表示下降幂。

考虑归纳证明，有

$$\underline{x^{n+1}} = \underline{x^n} (x-n) = (x-n) \sum_{i=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} (-1)^{n-i} x^i = \sum_{i=0}^{n+1} \left( -\begin{Bmatrix} n \\ i-1 \end{Bmatrix} - n \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} \right) (-1)^{n-i} x^i = \sum_{i=0}^{n+1} \begin{Bmatrix} n+1 \\ i \end{Bmatrix} (-1)^{n+1-i} x^i$$

### 运算

## 第一类斯特林数 $\dot{\ }_n$ 行

洛谷p5408

$$\begin{matrix} n \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} \\ \vdots \\ n \end{matrix}$$

考虑倍增法，假设已知  $x^{\overline{n}}$  显然可以  $O(n)$  计算出  $x^{\overline{n+1}} = (x+n)x^{\overline{n}}$

接下来考虑求解  $x^{\overline{2n}}$  有  $x^{\overline{2n}} = x^{\overline{n}}(x+n)^{\overline{n}}$  设  $x^{\overline{n}} = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  于是有

$$(x+n)^{\overline{n}} = \sum_{i=0}^n a_i (x+n)^i = \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} n^{i-j} x^j = \sum_{j=0}^n x^j \sum_{i=j}^n a_i \binom{i}{j} n^{i-j}$$

展开组合数，有

$$\sum_{j=0}^n x^j \sum_{i=j}^n a_i \binom{i}{j} n^{i-j} = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} \sum_{i=j}^n \frac{a_i i!}{(i-j)!} n^{i-j} = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} \sum_{i=0}^{n-j} a_{i+j} (i+j)! \frac{n^i}{i!}$$

设  $b_i = a_i i!, c_i = \frac{n^{n-i}}{(n-i)!}$  于是有

$$\sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} \sum_{i=0}^{n-j} a_{i+j} (i+j)! \frac{n^i}{i!} = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} \sum_{i=0}^{n-j} b_{i+j} c_{n-i}$$

于是可以  $O(n \log n)$  计算出  $(x+n)^{\overline{n}}$  最后与  $x^{\overline{n}}$  卷积即可  $O(n \log n)$  计算出  $x^{\overline{2n}}$

总时间复杂度  $T(n) = T(\frac{n}{2}) + O(n \log n)$  于是  $T(n) = O(n \log n)$

```
const int MAXN=1<<18,Mod=167772161,G=3;
int quick_pow(int a,int b){
    int ans=1;
    while(b){
        if(b&1)
            ans=1LL*ans*a%Mod;
        a=1LL*a*a%Mod;
        b>>=1;
    }
    return ans;
}
namespace Poly{
    const int G=3;
    int rev[MAXN<<2],Wn[30][2];
    void init(){
        int m=Mod-1,lg2=0;
        while(m%2==0)m>>=1,lg2++;
        Wn[lg2][1]=quick_pow(G,m);
        Wn[lg2][0]=quick_pow(Wn[lg2][1],Mod-2);
    }
}
```

```

    while(lg2){
        m<<=1,lg2--;
        Wn[lg2][0]=1LL*Wn[lg2+1][0]*Wn[lg2+1][0]%Mod;
        Wn[lg2][1]=1LL*Wn[lg2+1][1]*Wn[lg2+1][1]%Mod;
    }
}
int build(int k){
    int n,pos=0;
    while((1<<pos)<=k)pos++;
    n=1<<pos;
    _for(i,0,n)rev[i]=(rev[i>>1]>>1)|((i&1)<<(pos-1));
    return n;
}
void NTT(int *f,int n,bool type){
    _for(i,0,n)if(i<rev[i])
        swap(f[i],f[rev[i]]);
    int t1,t2;
    for(int i=1,lg2=0;i<n;i<<=1,lg2++){
        int w=Wn[lg2+1][type];
        for(int j=0;j<n;j+=(i<<1)){
            int cur=1;
            _for(k,j,j+i){
                t1=f[k],t2=1LL*cur*f[k+i]%Mod;
                f[k]=(t1+t2)%Mod,f[k+i]=(t1-t2)%Mod;
                cur=1LL*cur*w%Mod;
            }
        }
    }
    if(!type){
        int div=quick_pow(n,Mod-2);
        _for(i,0,n)f[i]=(1LL*f[i]*div%Mod+Mod)%Mod;
    }
}
void Mul(int *f,int _n,int *g,int _m,int xmod=0){
    int n=build(_n+_m-2);
    _for(i,_n,n)f[i]=0;_for(i,_m,n)g[i]=0;
    NTT(f,n,true);NTT(g,n,true);
    _for(i,0,n)f[i]=1LL*f[i]*g[i]%Mod;
    NTT(f,n,false);
    if(xmod)_for(i,xmod,n)f[i]=0;
}
}
int f[MAXN],g[MAXN],h[MAXN],frac[MAXN],invfrac[MAXN],pown[MAXN];
void Add(int n){
    for(int i=n;i>=0;i--)
        f[i+1]=(f[i]+1LL*f[i+1]*n)%Mod;
}
void Mul(int n){
    _rep(i,0,n)g[i]=1LL*f[i]*frac[i]%Mod;
    pown[0]=1;
    _rep(i,1,n)pown[i]=1LL*pown[i-1]*n%Mod;
}

```

```
_rep(i,0,n)h[i]=1LL*pown[n-i]*invfrac[n-i]%Mod;
Poly::Mul(g,n+1,h,n+1);
_rep(i,0,n)g[i]=1LL*g[n+1]*invfrac[i]%Mod;
Poly::Mul(f,n+1,g,n+1);
}
int main()
{
    Poly::init();
    int n=read_int(),pos=18,cur=1;
    while(n<(1<<pos))pos--;
    f[0]=0,f[1]=1,frac[0]=1;
    _rep(i,1,n)frac[i]=1LL*frac[i-1]*i%Mod;
    invfrac[n]=quick_pow(frac[n],Mod-2);
    for(int i=n;i;i--)invfrac[i-1]=1LL*invfrac[i]*i%Mod;
    while(pos--){
        Mul(cur);
        cur<<=1;
        if((n>>pos)&1){
            Add(cur);
            cur|=1;
        }
    }
    _rep(i,0,n)
    space(f[i]);
    return 0;
}
```

## 第一类斯特林数 $\cdot$ 列

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:jxm2001:%E6%96%AF%E7%89%B9%E6%9E%97%E6%95%B0&rev=1598020314](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E6%96%AF%E7%89%B9%E6%9E%97%E6%95%B0&rev=1598020314)

Last update: 2020/08/21 22:31