

斯特林数

第一类斯特林数

定义

第一类斯特林数 $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ 表示将 n 个不同元素构成 m 个圆排列的方案。

性质一

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} + (n-1) \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}$$

考虑新加入的数 n 要么单独成环，要么插入到其他环中，其中插入方式有 $n-1$ 种。

性质二

$$x^{\overline{n}} = \sum_{i=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} x^i$$

其中 $x^{\overline{n}}$ 表示上升幂。

考虑归纳证明，有

$$x^{\overline{n+1}} = x^{\overline{n}}(x+n) = (x+n) \sum_{i=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} x^i = \sum_{i=0}^{n+1} \left(\begin{Bmatrix} n \\ i-1 \end{Bmatrix} + n \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} \right) x^i = \sum_{i=0}^{n+1} \begin{Bmatrix} n+1 \\ i \end{Bmatrix} x^i$$

性质三

$$x^{\underline{n}} = \sum_{i=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} (-1)^{n-i} x^i$$

其中 $x^{\underline{n}}$ 表示下降幂。

考虑归纳证明，有

$$x^{\underline{n+1}} = x^{\underline{n}}(x-n) = (x-n) \sum_{i=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} (-1)^{n-i} x^i = \sum_{i=0}^{n+1} \left(-\begin{Bmatrix} n \\ i-1 \end{Bmatrix} - n \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} \right) (-1)^{n-i} x^i = \sum_{i=0}^{n+1} \begin{Bmatrix} n+1 \\ i \end{Bmatrix} (-1)^{n+1-i} x^i$$

运算

第一类斯特林数 $\dot{\ }_n$ 行

洛谷 p5408

$$\begin{matrix} n \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} (0 \leq i \leq n)$$

考虑倍增法，假设已知 $x^{\overline{n}}$ 显然可以 $O(n)$ 计算出 $x^{\overline{n+1}} = (x+n)x^{\overline{n}}$

接下来考虑求解 $x^{\overline{2n}}$ 有 $x^{\overline{2n}} = x^{\overline{n}}(x+n)^{\overline{n}}$ 设 $x^{\overline{n}} = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ 于是有

$$(x+n)^{\overline{n}} = \sum_{i=0}^n a_i (x+n)^i = \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} n^{i-j} x^j = \sum_{j=0}^n x^j \sum_{i=j}^n a_i \binom{i}{j} n^{i-j}$$

展开组合数，有

$$\sum_{j=0}^n x^j \sum_{i=j}^n a_i \binom{i}{j} n^{i-j} = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} \sum_{i=j}^n \frac{a_i i!}{(i-j)!} n^{i-j} = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} \sum_{i=0}^{n-j} a_{i+j} (i+j)! \frac{n^i}{i!}$$

设 $b_i = a_i i!, c_i = \frac{n^{n-i}}{(n-i)!}$ 于是有

$$\sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} \sum_{i=0}^{n-j} a_{i+j} (i+j)! \frac{n^i}{i!} = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} \sum_{i=0}^{n-j} b_{i+j} c_{n-i}$$

于是可以 $O(n \log n)$ 计算出 $(x+n)^{\overline{n}}$ 最后与 $x^{\overline{n}}$ 卷积即可 $O(n \log n)$ 计算出 $x^{\overline{2n}}$

总时间复杂度 $T(n) = T(\frac{n}{2}) + O(n \log n)$ 于是 $T(n) = O(n \log n)$

```
const int MAXN=1<<18,Mod=167772161,G=3;
int quick_pow(int a,int b){
    int ans=1;
    while(b){
        if(b&1)
            ans=1LL*ans*a%Mod;
        a=1LL*a*a%Mod;
        b>>=1;
    }
    return ans;
}
namespace Poly{
    const int G=3;
    int rev[MAXN<<2],Wn[30][2];
    void init(){
        int m=Mod-1,lg2=0;
        while(m%2==0)m>>=1,lg2++;
        Wn[lg2][1]=quick_pow(G,m);
        Wn[lg2][0]=quick_pow(Wn[lg2][1],Mod-2);
    }
}
```

```

    while(lg2){
        m<<=1,lg2--;
        Wn[lg2][0]=1LL*Wn[lg2+1][0]*Wn[lg2+1][0]%Mod;
        Wn[lg2][1]=1LL*Wn[lg2+1][1]*Wn[lg2+1][1]%Mod;
    }
}
int build(int k){
    int n,pos=0;
    while((1<<pos)<=k)pos++;
    n=1<<pos;
    _for(i,0,n)rev[i]=(rev[i>>1]>>1)|((i&1)<<(pos-1));
    return n;
}
void NTT(int *f,int n,bool type){
    _for(i,0,n)if(i<rev[i])
        swap(f[i],f[rev[i]]);
    int t1,t2;
    for(int i=1,lg2=0;i<n;i<<=1,lg2++){
        int w=Wn[lg2+1][type];
        for(int j=0;j<n;j+=(i<<1)){
            int cur=1;
            _for(k,j,j+i){
                t1=f[k],t2=1LL*cur*f[k+i]%Mod;
                f[k]=(t1+t2)%Mod,f[k+i]=(t1-t2)%Mod;
                cur=1LL*cur*w%Mod;
            }
        }
    }
    if(!type){
        int div=quick_pow(n,Mod-2);
        _for(i,0,n)f[i]=(1LL*f[i]*div%Mod+Mod)%Mod;
    }
}
void Mul(int *f,int _n,int *g,int _m,int xmod=0){
    int n=build(_n+_m-2);
    _for(i,_n,n)f[i]=0;_for(i,_m,n)g[i]=0;
    NTT(f,n,true);NTT(g,n,true);
    _for(i,0,n)f[i]=1LL*f[i]*g[i]%Mod;
    NTT(f,n,false);
    if(xmod)_for(i,xmod,n)f[i]=0;
}
int f[MAXN],g[MAXN],h[MAXN],frac[MAXN],invfrac[MAXN],pown[MAXN];
void Add(int n){
    for(int i=n;i>=0;i--)
        f[i+1]=(f[i]+1LL*f[i+1]*n)%Mod;
}
void Mul(int n){
    _rep(i,0,n)g[i]=1LL*f[i]*frac[i]%Mod;
    pown[0]=1;
    _rep(i,1,n)pown[i]=1LL*pown[i-1]*n%Mod;
}

```

```
_rep(i,0,n)h[i]=1LL*pown[n-i]*invfrac[n-i]%Mod;
Poly::Mul(g,n+1,h,n+1);
_rep(i,0,n)g[i]=1LL*g[n+1]*invfrac[i]%Mod;
Poly::Mul(f,n+1,g,n+1);
}
int main()
{
    Poly::init();
    int n=read_int(),pos=18,cur=1;
    while(n<(1<<pos))pos--;
    f[0]=0,f[1]=1,frac[0]=1;
    _rep(i,1,n)frac[i]=1LL*frac[i-1]*i%Mod;
    invfrac[n]=quick_pow(frac[n],Mod-2);
    for(int i=n;i;i--)invfrac[i-1]=1LL*invfrac[i]*i%Mod;
    while(pos--){
        Mul(cur);
        cur<<=1;
        if((n>>pos)&1){
            Add(cur);
            cur|=1;
        }
    }
    _rep(i,0,n)
    space(f[i]);
    return 0;
}
```

第一类斯特林数 \cdot 列

[洛谷p5409](#)

$$\begin{matrix} i \\ \backslash \\ k \end{matrix} (0 \leq i \leq n)$$

考虑只有一个圆排列的方案 EGF 有 $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (i-1)! \frac{x^i}{i!}$

于是 k 个圆排列的 EGF 为 $\frac{F^k(x)}{k!}$ 利用 Exp 和 Ln 可以 $O(n \log n)$ 计算。

```
const int MAXN=1<<16,Mod=167772161,G=3;
int quick_pow(int a,int b){
    int ans=1;
    while(b){
        if(b&1)
            ans=1LL*ans*a%Mod;
        a=1LL*a*a%Mod;
        b>>=1;
    }
    return ans;
}
```

```

}
namespace Poly{
const int G=3;
int rev[MAXN<<2],Wn[30][2];
void init(){
    int m=Mod-1,lg2=0;
    while(m%2==0)m>>=1,lg2++;
    Wn[lg2][1]=quick_pow(G,m);
    Wn[lg2][0]=quick_pow(Wn[lg2][1],Mod-2);
    while(lg2){
        m<<=1,lg2--;
        Wn[lg2][0]=1LL*Wn[lg2+1][0]*Wn[lg2+1][0]%Mod;
        Wn[lg2][1]=1LL*Wn[lg2+1][1]*Wn[lg2+1][1]%Mod;
    }
}
int build(int k){
    int n,pos=0;
    while((1<<pos)<=k)pos++;
    n=1<<pos;
    _for(i,0,n)rev[i]=(rev[i>>1]>>1)|((i&1)<<(pos-1));
    return n;
}
void NTT(int *f,int n,bool type){
    _for(i,0,n)if(i<rev[i])
        swap(f[i],f[rev[i]]);
    int t1,t2;
    for(int i=1,lg2=0;i<n;i<<=1,lg2++){
        int w=Wn[lg2+1][type];
        for(int j=0;j<n;j+=(i<<1)){
            int cur=1;
            _for(k,j,j+i){
                t1=f[k],t2=1LL*cur*f[k+i]%Mod;
                f[k]=(t1+t2)%Mod,f[k+i]=(t1-t2)%Mod;
                cur=1LL*cur*w%Mod;
            }
        }
    }
    if(!type){
        int div=quick_pow(n,Mod-2);
        _for(i,0,n)f[i]=(1LL*f[i]*div%Mod+Mod)%Mod;
    }
}
void Mul(int *f,int _n,int *g,int _m,int xmod=0){
    int n=build(_n+_m-2);
    _for(i,_n,n)f[i]=0;_for(i,_m,n)g[i]=0;
    NTT(f,n,true);NTT(g,n,true);
    _for(i,0,n)f[i]=1LL*f[i]*g[i]%Mod;
    NTT(f,n,false);
    if(xmod)_for(i,xmod,n)f[i]=0;
}
void Inv(const int *f,int *g,int _n){

```

```
static int temp[MAXN<<2];
if(_n==1)return g[0]=quick_pow(f[0],Mod-2),void();
Inv(f,g,(_n+1)>>1);
int n=build((_n-1)<<1);
_for(i,(_n+1)>>1,n)g[i]=0;
_for(i,0,_n)temp[i]=f[i];_for(i,_n,n)temp[i]=0;
NTT(g,n,true);NTT(temp,n,true);
_for(i,0,n)g[i]=(2-1LL*temp[i]*g[i]%Mod)*g[i]%Mod;
NTT(g,n,false);
_for(i,_n,n)g[i]=0;
}
void Ln(const int *f,int *g,int _n){
static int temp[MAXN<<2];
Inv(f,g,_n);
_for(i,1,_n)temp[i-1]=1LL*f[i]*i%Mod;
temp[_n-1]=0;
Mul(g,_n,temp,_n-1,_n);
for(int i=_n-1;i;i--)g[i]=1LL*g[i-1]*quick_pow(i,Mod-2)%Mod;
g[0]=0;
}
void Exp(const int *f,int *g,int _n){
static int temp[MAXN<<2];
if(_n==1)return g[0]=1,void();
Exp(f,g,(_n+1)>>1);
_for(i,(_n+1)>>1,_n)g[i]=0;
Ln(g,temp,_n);
temp[0]=(1+f[0]-temp[0])%Mod;
_for(i,1,_n)temp[i]=(f[i]-temp[i])%Mod;
Mul(g,(_n+1)>>1,temp,_n,_n);
}
void Pow(const int *f,int *g,int _n,int k1,int k2){
static int temp[MAXN<<2];
int pos=0,posv;
while(!f[pos]&&pos<_n)pos++;
if(1LL*pos*k2>=_n){
_for(i,0,_n)g[i]=0;
return;
}
posv=quick_pow(f[pos],Mod-2);
_for(i,pos,_n)g[i-pos]=1LL*f[i]*posv%Mod;
_for(i,_n-pos,_n)g[i]=0;
Ln(g,temp,_n);
_for(i,0,_n)temp[i]=1LL*temp[i]*k1%Mod;
Exp(temp,g,_n);
pos=pos*k2,posv=quick_pow(posv,1LL*k2*(Mod-2)*(Mod-1));
for(int i=_n-1;i>=pos;i--)g[i]=1LL*g[i-pos]*posv%Mod;
_for(i,0,pos)g[i]=0;
}
}
int f[MAXN<<2],g[MAXN<<2],frac[MAXN<<1],invfrac[MAXN<<1];
```

```

int main()
{
    Poly::init();
    int n=read_int(),k=read_int();
    frac[0]=1;
    _rep(i,1,n)frac[i]=1LL*frac[i-1]*i%Mod;
    invfrac[n]=quick_pow(frac[n],Mod-2);
    for(int i=n;i;i--)invfrac[i-1]=1LL*invfrac[i]*i%Mod;
    _rep(i,1,n)f[i]=1LL*frac[i-1]*invfrac[i]%Mod;
    Poly::Pow(f,g,n+1,k,k);
    _rep(i,0,n)g[i]=1LL*g[i]*frac[i]%Mod*invfrac[k]%Mod;
    _rep(i,0,n)space(g[i]);
    return 0;
}

```

第二类斯特林数

定义

第二类斯特林数 $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ 表示将 n 个不同元素划分到 k 个非空集的方案数。

性质一

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} + k \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}$$

考虑新加入的数 n 要么单独划分成一个集合，要么加入到其他集合中，其中加入方式有 k 种。

性质二

$$x^n = \sum_{i=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} (-1)^{n-i} x^{\overline{i}}$$

其中 $x^{\overline{i}}$ 表示上升幂。

考虑归纳证明，有

$$x^{n+1} = x \sum_{i=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} (-1)^{n-i} x^{\overline{i}} = \sum_{i=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} (-1)^{n-i} \left(x^{\overline{i+1}} - ix^{\overline{i}} \right) = \sum_{i=0}^{n+1} \begin{Bmatrix} n+1 \\ i \end{Bmatrix} (-1)^{n+1-i} x^{\overline{i}}$$

性质三

$$x^n = \sum_{i=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix} x^{\underline{i}}$$

其中 $x^{\underline{i}}$ 表示下降幂。

考虑归纳证明，有

$$x^{n+1} = x \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{\underline{i}} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{\underline{i+1}} + x \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{\underline{i}}$$

运算

第二类斯特林数 \cdot 行

[洛谷p5395](#)

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (0 \leq i \leq n)$$

考虑将 n 个数装入 k 个盒子，有 k^n 种放法。其中 i 个盒子中有球的方案数为 $i! \binom{n}{i}$

于是 $k^n = \sum_{i=0}^k i! \binom{n}{i}$ 设 $f(i) = i^n, g(i) = i! \binom{n}{i}$ 于是有 $f(k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} g(i)$
根据二项式反演

$$k! \binom{n}{k} = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{n}{i} i^n = k! \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{k-i}}{(k-i)!} \binom{n}{i} i^n$$

于是 $O(n \log n)$ 卷积即可。

```
const int MAXN=2e5+5,Mod=167772161,G=3;
int quick_pow(int a,int b){
    int ans=1;
    while(b){
        if(b&1)
            ans=1LL*ans*a%Mod;
        a=1LL*a*a%Mod;
        b>>=1;
    }
    return ans;
}
namespace Poly{
    const int G=3;
    int rev[MAXN<<2],Wn[30][2];
    void init(){
        int m=Mod-1,lg2=0;
        while(m%2==0)m>>=1,lg2++;
        Wn[lg2][1]=quick_pow(G,m);
        Wn[lg2][0]=quick_pow(Wn[lg2][1],Mod-2);
        while(lg2){
            m<<=1,lg2--;
        }
    }
}
```

```

        Wn[lg2][0]=1LL*Wn[lg2+1][0]*Wn[lg2+1][0]%Mod;
        Wn[lg2][1]=1LL*Wn[lg2+1][1]*Wn[lg2+1][1]%Mod;
    }
}
int build(int k){
    int n,pos=0;
    while((1<<pos)<=k)pos++;
    n=1<<pos;
    _for(i,0,n)rev[i]=(rev[i>>1]>>1)|((i&1)<<(pos-1));
    return n;
}
void NTT(int *f,int n,bool type){
    _for(i,0,n)if(i<rev[i])
        swap(f[i],f[rev[i]]);
    int t1,t2;
    for(int i=1,lg2=0;i<n;i<=<=1,lg2++){
        int w=Wn[lg2+1][type];
        for(int j=0;j<n;j+=(i<<1)){
            int cur=1;
            _for(k,j,j+i){
                t1=f[k],t2=1LL*cur*f[k+i]%Mod;
                f[k]=(t1+t2)%Mod,f[k+i]=(t1-t2)%Mod;
                cur=1LL*cur*w%Mod;
            }
        }
    }
    if(!type){
        int div=quick_pow(n,Mod-2);
        _for(i,0,n)f[i]=(1LL*f[i]*div%Mod+Mod)%Mod;
    }
}
void Mul(int *f,int _n,int *g,int _m,int xmod=0){
    int n=build(_n+_m-2);
    _for(i,_n,n)f[i]=0;_for(i,_m,n)g[i]=0;
    NTT(f,n,true);NTT(g,n,true);
    _for(i,0,n)f[i]=1LL*f[i]*g[i]%Mod;
    NTT(f,n,false);
    if(xmod)_for(i,xmod,n)f[i]=0;
}
}
int f[MAXN<<2],g[MAXN<<2],frac[MAXN],invfrac[MAXN];
int main()
{
    Poly::init();
    int n=read_int();
    frac[0]=1;
    _rep(i,1,n)frac[i]=1LL*frac[i-1]*i%Mod;
    invfrac[n]=quick_pow(frac[n],Mod-2);
    for(int i=n;i-->0)invfrac[i]=1LL*invfrac[i+1]*i%Mod;
    _rep(i,0,n){
        f[i]=1LL*quick_pow(i,n)*invfrac[i]%Mod;
    }
}

```

```
    if(i&1)g[i]=1LL*(Mod-1)*invfrac[i]%Mod;
    else g[i]=invfrac[i];
}
Poly::Mul(f,n+1,g,n+1);
_rep(i,0,n)space(f[i]);
return 0;
}
```

第二类斯特林数 \cdot 列

洛谷p5396



From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E6%96%AF%E7%89%B9%E6%9E%97%E6%95%B0&rev=1598070002

Last update: 2020/08/22 12:20