

普通生成函数

算法简介

形如 $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的函数 a_n 可以提供关于这个序列的信息，一般用于解决组合计算问题。

算法例题

例题一

[洛谷p2000](#)

题意

已知如下约束条件：

- $6 \mid a$
- $b \leq 9$
- $c \leq 5$
- $4 \mid d$
- $e \leq 7$
- $2 \mid f$
- $0 \leq g \leq 1$
- $8 \mid h$
- $10 \mid i$
- $j \leq 3$
- $a+b+c+d+e+f+g+h+i+j=n$
- 所有数非负整数

问满足以上约束的所有情况数。

题解

根据上述条件，可以得到如下生成函数：

- $1+x^6+x^{12}+\dots=\frac{1}{1-x^6}$
- $1+x+x^2+\dots+x^9=\frac{1-x^{10}}{1-x}$
- $1+x+x^2+\dots+x^5=\frac{1-x^6}{1-x}$
- $1+x^4+x^8+\dots=\frac{1}{1-x^4}$
- $1+x+x^2+\dots+x^7=\frac{1-x^8}{1-x}$
- $1+x^2+x^4+\dots=\frac{1}{1-x^2}$
- $1+x=\frac{1-x^2}{1-x}$
- $1+x^8+x^{16}+\dots=\frac{1}{1-x^8}$
- $1+x^{10}+x^{20}+\dots=\frac{1}{1-x^{10}}$

• $1+x+x^2+x^3=\frac{1-x^4}{1-x}$

全部相乘得到 $\frac{1}{(1-x)^5}=\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+4}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+4}{4}x^n$

于是答案为 $\binom{n+4}{4}$

例题二

题意

已知卡特兰数定义

$$c_n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i-1}, & n > 0 \end{cases}$$

求 c_n 通项公式。

题解

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i-1} x^n \\ &= 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i-1} x^n = 1 + x F^2(x) \end{aligned}$$
 解得 $F(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$ 又有 $F(0) = c_0 = 1$ 于是发现只有 $F(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$ 一种可能。

$$\begin{aligned} \sqrt{1-4x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} (-4x)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-3)!!}{2^{nn} n!} (-4x)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!}{2^{n(2n-2)} n!} (-4x)^n \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{(n-1)! n!} x^n \\ &= 1 - 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} x^n \end{aligned}$$
 所以有
$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1 - \left(1 - 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} x^n\right)}{2x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} x^n \end{aligned}$$
 于是有 $c_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{2n}{n+1} \binom{2n}{n+1}$

例题三

题意

求满足下列条件的序列数：

- $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$
- $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k \geq 1$

引理

五边形数定理

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1-x^i) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^{k(3k\pm 1)/2} = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \dots$$

证明

题解

先考虑 $a_1 \leq t$ 的情况。

只选择 1\$ 的方案生成函数为 $1+x+x^2+\dots = \frac{1}{1-x}$

只选择 2\$ 的方案生成函数为 $1+x^2+x^4+\dots = \frac{1}{1-x^2}$

以此类推，只选择 t 的方案生成函数为 $1+x^t+x^{2t}+\dots = \frac{1}{1-x^t}$

于是 $a_1 \leq t$ 的生成函数为 $P_t(x) = \prod_{i=1}^t \frac{1}{1-x^i}$ 。无限制时生成函数为 $P(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}$

答案即为 $[x^n]P(x)$ 。接下来考虑如何展开 $P(x)$ 。

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E7%94%9F%E6%88%90%E5%87%BD%E6%95%B0_1&rev=1596944043

Last update: 2020/08/09 11:34