

# 普通生成函数

## 算法简介

形如  $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$  的函数  $a_n$  可以提供关于这个序列的信息，一般用于解决组合计算问题。

## 算法例题

### 例题一

[洛谷p2000](#)

#### 题意

已知如下约束条件：

- $6 \mid a$
- $b \leq 9$
- $c \leq 5$
- $4 \mid d$
- $e \leq 7$
- $2 \mid f$
- $0 \leq g \leq 1$
- $8 \mid h$
- $10 \mid i$
- $j \leq 3$
- $a+b+c+d+e+f+g+h+i+j=n$
- 所有数非负整数

问满足以上约束的所有情况数。

#### 题解

根据上述条件，可以得到如下生成函数：

- $1+x^6+x^{12}+\cdots=\frac{1}{1-x^6}$
- $1+x+x^2+\cdots+x^9=\frac{1-x^{10}}{1-x}$
- $1+x+x^2+\cdots+x^5=\frac{1-x^6}{1-x}$
- $1+x^4+x^8+\cdots=\frac{1}{1-x^4}$
- $1+x+x^2+\cdots+x^7=\frac{1-x^8}{1-x}$
- $1+x^2+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x^2}$
- $1+x=\frac{1-x^2}{1-x}$
- $1+x^8+x^{16}+\cdots=\frac{1}{1-x^8}$
- $1+x^{10}+x^{20}+\cdots=\frac{1}{1-x^{10}}$

•  $1+x+x^2+x^3=\frac{1-x^4}{1-x}$

全部相乘得到  $\frac{1}{(1-x)^5}=\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+4}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+4}{4}x^n$

于是答案为  $\binom{n+4}{4}$

## 例题二

### 题意

已知卡特兰数定义

$$c_n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i-1}, & n>0 \end{cases}$$

求  $c_n$  通项公式。

### 题解

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i-1} x^n \\ &= 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i-1} x^n = 1 + x F^2(x) \end{aligned}$$
 解得  $F(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$  又有  $F(0) = c_0 = 1$  于是发现只有  $F(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$  一种可能。

$$\begin{aligned} \sqrt{1-4x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} (-4x)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-3)!!}{2^{nn} n!} (-4x)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!}{2^{n(2n-2)} n!} (-4x)^n \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{(n-1)! n!} x^n \\ &= 1 - 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} x^n \end{aligned}$$
 所以有 
$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1 - \left(1 - 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} x^n\right)}{2x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} x^n \end{aligned}$$
 于是有  $c_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{2n}{n+1} \binom{2n}{n+1}$

## 例题三

### 题意

求满足下列条件的序列数：

- $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$
- $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k \geq 1$

### 题解

先考虑  $a_1 \le t$  的情况。

只选择 \$1\$ 的方案生成函数为  $1+x+x^2+\dots=\frac{1}{1-x}$

只选择 \$2\$ 的方案生成函数为  $1+x^2+x^4+\dots=\frac{1}{1-x^2}$

以此类推，只选择 \$t\$ 的方案生成函数为  $1+x^t+x^{2t}+\dots=\frac{1}{1-x^t}$

于是  $a_1 \le t$  的生成函数为  $P_t(x)=\prod_{i=1}^t \frac{1}{1-x^i}$  无限制时生成函数为  $P(x)=\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}$

答案即为  $[x^n]P(x)$  接下来考虑如何展开  $P(x)$

这里给出五边形数定理和证明

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1-x^i) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^{k(3k-1)/2} = 1 - x - x^2 + x^5 - x^7 + x^{12} - x^{15} + \dots$$

于是有  $P(x) \prod_{i=1}^{\infty} (1-x^i) = 1$  展开

$$\begin{matrix} P(x) & p_0 & p_1x & p_2x^2 & p_3x^3 & p_4x^4 & p_5x^5 & \dots & -xP(x) & & - \\ p_0x & -p_1x^2 & -p_2x^3 & -p_3x^4 & -p_4x^5 & \dots & -x^2P(x) & & & -p_0x^2 & -p_1x^3 & - \\ p_2x^4 & -p_3x^5 & \dots & x^5P(x) & & & & & & & & \\ \prod_{i=1}^{\infty} (1-x^i)P(x) & 1 & 0x & 0x^2 & 0x^3 & 0x^4 & 0x^5 & \dots & & & & \end{matrix}$$

于是  $p_n = [n=0] + p_{n-1} + p_{n-2} - p_{n-5} - p_{n-7} + \dots$

### 例题四

牛客暑期多校(第五场) C 题

#### 题意

已知  $\sum_{i=1}^k a_i = n, \sum_{i=1}^k b_i = m, P = \sum_{i=1}^k \min(a_i, b_i)$  求  $\sum_{a,b} P$

#### 题解

令  $F(x) = \sum_{i=1, j=1}^{\infty} x^{iy_j}$  于是答案为  $[x^n y^m] F^k(x)$

考虑求出  $F(x)$  的封闭式。

$$\begin{aligned} F(x) &= xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + \dots + x^2y \\ &+ 2x^2y^2 + 2x^2y^3 + 2x^2y^4 + \dots + x^3y + 2x^3y^2 + 3x^3y^3 \\ &+ 3x^3y^4 + \dots \end{aligned}$$
 先想办法将系数化为 \$1\$，考虑相邻行之间错位相减，有

$$(1-x)F(x) = xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + \dots + x^2y^2 + x^2y^3 + x^2y^4 + \dots + x^3y^3 + x^3y^4 + \dots$$
 然后发现每行均成为等比数列，直接求和得  $(1-x)F(x) = \frac{xy}{1-y} + \frac{x^2y^2}{1-y} + \frac{x^3y^3}{1-y} + \dots$  发现结果仍然为等比数列，继续求和得  $(1-x)F(x) = \frac{xy}{(1-x)(1-xy)}$  于是有 
$$F^k(x) = \frac{x^k y^k}{(1-x)^k (1-xy)^k} = x^k y^k \sum_{a=0, b=0, c=0}^{\infty} \binom{k+a-1}{a} x^{k+b-1} \binom{k+b-1}{c} y^{k+c-1} x^c$$

考虑枚举  $c$  的同时计算出  $a, b$  即可，时间复杂度  $O(n)$

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:jxm2001:%E7%94%9F%E6%88%90%E5%87%BD%E6%95%B0\\_1&rev=1596957693](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E7%94%9F%E6%88%90%E5%87%BD%E6%95%B0_1&rev=1596957693)

Last update: 2020/08/09 15:21