普通生成函数

算法简介

形如 $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的函数 a_n 可以提供关于这个序列的信息，一般用于解决组合计算问题。

算法例题

例题一

洛谷p2000

题意

已知如下约束条件：

- $6\mid a$
- $b\le 9$
- $c\le 5$
- $4\mid d$
- $e\le 7$
- $2\mid f$
- $0\le g\le 1$
- $8\mid h$
- $10\mid i$
- $j\le 3$
- $a+b+c+d+e+f+g+h+i+j=n$
- 所有数非负整数

问满足以上约束的所有情况数。

题解

根据上述条件，可以得到如下生成函数：

- $1+x^6+x^{12}+\cdots=\frac 1{1-x^6}$
- $1+x+x^2+\cdots +x^9=\frac {1-x^{10}}{1-x}$
- $1+x+x^2+\cdots +x^5=\frac {1-x^6}{1-x}$
- $1+x^4+x^8+\cdots=\frac 1{1-x^4}$
- $1+x+x^2+\cdots +x^7=\frac {1-x^8}{1-x}$
- $1+x^2+x^4+\cdots=\frac 1{1-x^2}$
- $1+x=\frac {1-x^2}{1-x}$
- $1+x^8+x^{16}+\cdots=\frac 1{1-x^8}$
- $1+x^{10}+x^{20}+\cdots=\frac 1{1-x^{10}}$

- $1+x+x^2+x^3=\frac {1-x^4}{1-x}$

全部相乘得到 $\frac 1{(1-x)^5}=\sum_{n=0}^{\infty} {n+4 \choose n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty} {n+4 \choose 4}x^n$。

于是答案为 ${n+4 \choose 4}$。

例题二

题意

已知卡特兰数定义

$$c_n=\begin{cases} 1, & n=0\\ \sum_{i=0}^{n-1}c_ic_{n-i-1}, & n\gt 0 \end{cases}$$

求 c_n 通项公式。

题解

$$ \begin{equation}\begin{split} F(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\\ &=1+\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n\\ &=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1}c_ic_{n-i-1}x^n\\ &=1+x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1}c_ic_{n-i}x^n\\ &=1+xF^2(x) \end{split}\end{equation} $$ 解得 $F(x)=\frac {1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$，又有 $F(0)=c_0=1$，于是发现只有 $F(x)=\frac {1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ 一种可能。

$$ \begin{equation}\begin{split} \sqrt{1-4x}&=\sum_{n=0}^{\infty}{\frac 12 \choose n}(-4x)^n\\ &=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^nn!}(-4x)^n\\ &=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^n(2n-2)!!n!}(-4x)^n\\ &=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}(-4x)^n\\ &=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}x^n\\ &=1-2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}x^n\\ \end{split}\end{equation} $$ 所以有 $$ \begin{equation}\begin{split} F(x)&=\frac {1-\sqrt{1-4x}}{2x}\\ &=\frac {1-\left(1-2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}x^n\right)}{2x}\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}x^n \end{split}\end{equation} $$ 于是有 $c_n=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}=\frac{2n \choose n}{n+1}$。

例题三

题意

求满足下列条件的序列数：

1. $a_1+a_2+\cdots +a_k=n$
2. $a_1\ge a_2\ge\cdots \ge a_k\ge 1$

题解

先考虑 $a_1\le t$ 的情况。

只选择 1 的方案的生成函数为 $1+x+x^2+\cdots=\frac 1{1-x}$□

只选择 2 的方案的生成函数为 $1+x^2+x^4+\cdots=\frac 1{1-x^2}$□

以此类推，只选择 t 的方案的生成函数为 $1+x^t+x^{2t}+\cdots=\frac 1{1-x^t}$□

于是 $a_1\le t$ 的生成函数为 $P_t(x)=\prod_{i=1}^t \frac 1{1-x^i}$□$a_1$ 无限制时生成函数为 $P(x)=\prod_{i=1}^{\infty} \frac 1{1-x^i}$□

答案即为 $[x^n]P(x)$□接下来考虑如何展开 $P(x)$□

这里给出**五边形数定理**和证明□

$$\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-x^i\right)=1+\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^kx^{k(3k\pm 1)/2}=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+\cdots$$

于是有 $P(x)\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-x^i\right)=1$□展开

$$ \begin{matrix} P(x) & p_0 & p_1x & p_2x^2 & p_3x^3 & p_4x^4 & p_5x^5 &\cdots \\ -xP(x)& & -p_0x & -p_1x^2 & -p_2x^3 & -p_3x^4 & -p_4x^5 &\cdots \\ -x^2P(x)& & & -p_0x^2 & -p_1x^3 & -p_2x^4 & -p_3x^5 &\cdots \\ x^5P(x)& & & & & & p_0x^5 &\cdots \\ \cdots \\ \prod_{i=1}^{\infty}\left(1-x^i\right)P(x) & 1 & 0x & 0x^2 & 0x^3 & 0x^4 & 0x^5 &\cdots \end{matrix} $$

于是 $p_n=[n==0]+p_{n-1}+p{n-2}-p_{n-5}-p_{n-7}+\cdots$□

例题四

牛客暑期多校(第五场) C 题

题意

已知 $\sum_{i=1}^k a_i=n,\sum_{i=1}^k b_i=m,P=\sum_{i=1}^k \min(a_i,b_i)$□$\sum_{a,b}P$□

题解

令 $F(x)=\sum_{i=1,j=1}^{\infty} x^iy^j$□于是答案为 $[x^ny^m]F^k(x)$□

考虑求出 $F(x)$ 的封闭式。

$$ \begin{equation}\begin{split} F(x)&=xy &+xy^2 &+xy^3 &+xy^4+\cdots \\ &+x^2y &+2x^2y^2 &+2x^2y^3 &+2x^2y^4+\cdots \\ &+x^3y &+2x^3y^2 &+3x^3y^3 &+3x^3y^4+\cdots \end{split}\end{equation} $$ 先想办法将系数化为 1，考虑相邻行之间错位相减，有

$$ \begin{equation}\begin{split} (1-x)F(x)&=xy &+xy^2 &+xy^3 &+xy^4+\cdots \\ & &+x^2y^2 &+x^2y^3 &+x^2y^4+\cdots \\ & & &+x^3y^3 &+x^3y^4+\cdots \end{split}\end{equation} $$ 然后发现每行均成为等比数列，直接求和得 $$(1-x)F(x)=\frac {xy}{1-y}+\frac{x^2y^2}{1-y}+\frac{x^3y^3}{1-y}+\cdots $$ 发现结果仍然为等比数列，继续求和得 $$(1-x)F(x)=\frac {xy}{(1-y)(1-xy)}$$ 于是有 $$ \begin{equation}\begin{split} F^k(x)&=\frac {x^ky^k}{(1-x)^k(1-y)^k(1-xy)^k} \\ &=x^ky^k\sum_{a=0,b=0,c=0}^{\infty} {k+a-1 \choose a}x^a{k+b-1 \choose b}y^b{k+c-1 \choose c}x^cy^c \end{split}\end{equation} $$

考虑枚举 c 的同时计算出 a,b 即可，时间复杂度 $O(n)$