

指数生成函数(EGF)

算法简介

形如 $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ 的函数 a_n 可以提供关于这个序列的信息，一般用于解决有标号组合计数问题。

基本运算

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}, G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!}$$

$$F(x)G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i b_{n-i} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n \frac{x^n}{n!} = e^{kx}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{\underline{k}} \frac{x^n}{n!} = x^k e^x$$

算法例题

例题一

题意

定义贝尔数 w_n 表示将集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 划分为若干个不相交非空集合的方案数，求 w_n

题解

假设将 n 化分到一个大小为 i 的集合，不难得出递推式

$$w_n = [n=0] + \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} w_{n-i}$$

构造 $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{x^n}{n!}$, $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ 于是有

$$F(x) = 1 + \int F(x)G(x) \mathrm{d}x = 1 + \int F(x)e^x \mathrm{d}x$$

接下来考虑求解 $F(x)$

$$\mathrm{d}F(x) = F(x)e^x \mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{F(x)} = e^x \mathrm{d}x$$

$$\ln F(x) = e^x + C$$

将 $F(0)=1$ 代入，得 $F(x)=\exp(e^x-1)$ 于是 $w_n=\frac{x^n}{n!}F(x)$

拓展

考虑对结果的解释 $e^x-1=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ ($a_n=1$) 可以理解为将所有 n 个元素化为为一个集合的方案数 a_n 的 EGF

$\exp(e^x-1)=\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i(x)}{i!}$ 式子中 $\sum_{i=0}^{\infty}$ 可以理解为枚举最终划分的集合数 i

$A^i(x)$ 可以理解为将所有元素划分为 i 个非空集合 $i!$ 可以理解为划分的集合之间无序所以除以全排列数。

类似的，设 n 个点带标号生成树的 EGF 为 $F(x)$ 则 n 个点带标号生成森林的 EGF 为 $\exp F(x)$

其中 n 个点带标号生成树的 EGF 容易求得为 $\sum_{n=0}^{\infty} n^{n-2} \frac{x^n}{n!}$ 所以取 \exp 即可快速求得 n 个点带标号生成森林的 EGF

设 n 个点带标号无向连通图的 EGF 为 $F(x)$ 则 n 个点带标号无向图的 EGF 为 $\exp F(x)$

其中 n 个点带标号无向图的 EGF 容易求得为 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(n-1)/2} \frac{x^n}{n!}$ 所以取 \ln 即可快速求得 n 个点带标号无向连通图的 EGF

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E7%94%9F%E6%88%90%E5%87%BD%E6%95%B0_2&rev=1597242482

Last update: 2020/08/12 22:28

