

# 指数生成函数(EGF)

## 算法简介

形如  $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$  的函数  $a_n$  可以提供关于这个序列的信息，一般用于解决有标号组合计数问题。

## 基本运算

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}, G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!} \\ F(x)G(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i b_{n-i} \frac{x^n}{n!} \\ \sum_{n=0}^{\infty} k^n \frac{x^n}{n!} &= e^{kx} \\ \sum_{n=0}^{\infty} n^{\underline{k}} \frac{x^n}{n!} &= x^k e^x \end{aligned}$$

## 算法例题

### 例题一

#### 题意

定义贝尔数  $w_n$  表示将集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  划分为若干个不相交非空集合的方案数，求  $w_n$

#### 题解

假设将  $n$  化分到一个大小为  $i$  的集合，不难得出递推式

$$w_n = [n == 0] + \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} w_{n-i}$$

构造  $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{x^n}{n!}, G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$  于是有

$$F(x) = 1 + \int F(x)G(x) dx = 1 + \int F(x)e^x dx$$

接下来考虑求解  $F(x)$

$$dF(x)/dx = F(x)e^x$$

$$dF(x)/dx = e^x$$

$$\ln F(x) = x + C$$

将  $F(0)=1$  代入，得  $F(x)=\exp(e^x-1)$  于是  $w_n=[\frac{x^n}{n!}]F(x)$

## 拓展

考虑对结果的解释  $e^x-1=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$  ( $a_n=1$ ) 可以理解为将所有  $n$  个元素化为一个集合的方案数  $a_n$  的  $\text{EGF}$

$\exp(e^x-1)=\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i(x)}{i!}$  式子中  $\sum_{i=0}^{\infty}$  可以理解为枚举最终划分的集合数  $i$

$A^i(x)$  可以理解为将所有元素划分为  $i$  个非空集合  $i!$  可以理解为划分的集合之间无序所以除以全排列数。

类似的，设  $n$  个点带标号生成树的  $\text{EGF}$  为  $F(x)$  则  $n$  个点带标号生成森林的  $\text{EGF}$  为  $\exp F(x)$

其中  $n$  个点带标号生成树的  $\text{EGF}$  容易求得为  $\sum_{n=0}^{\infty} n^{n-2} \frac{x^n}{n!}$  所以取  $\exp$  即可快速求得  $n$  个点带标号生成森林的  $\text{EGF}$

设  $n$  个点带标号无向连通图的  $\text{EGF}$  为  $F(x)$  则  $n$  个点带标号无向图的  $\text{EGF}$  为  $\exp F(x)$

其中  $n$  个点带标号无向图的  $\text{EGF}$  容易求得为  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(n-1)/2} \frac{x^n}{n!}$  所以取  $\ln$  即可快速求得  $n$  个点带标号无向连通图的  $\text{EGF}$

From:  
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:  
[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:jxm2001:%E7%94%9F%E6%88%90%E5%87%BD%E6%95%B0\\_2&rev=1597242482](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E7%94%9F%E6%88%90%E5%87%BD%E6%95%B0_2&rev=1597242482)

Last update: 2020/08/12 22:28

