

# 指数生成函数(EGF)

## 算法简介

形如  $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}$  的函数  $a_n$  可以提供关于这个序列的信息，一般用于解决有标号组合计数问题。

## 基本运算

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!},G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{x^n}{n!}$$

$$F(x)G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^n a_ib_{n-i}\frac{x^n}{i!(n-i)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}a_ib_{n-i}\frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}k^n\frac{x^n}{n!}=e^{kx}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}n^{\underline{k}}\frac{x^n}{n!}=x^ke^x$$

## 算法例题

### 例题一

#### 题意

定义贝尔数  $w_n$  表示将集合  $\{1,2,\dots,n\}$  划分为若干个不相交非空集合的方案数，求  $w_n$

#### 题解

假设将  $n$  化分到一个大小为  $i$  的集合，不难得出递推式

$$w_n=[n=0]+\sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1}w_{n-i}$$

构造  $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}w_n\frac{x^n}{n!},G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$  于是有

$$F(x)=1+\int F(x)G(x)\mathrm{d}x=1+\int F(x)e^x\mathrm{d}x$$

接下来考虑求解  $F(x)$

$$\mathrm{d}F(x)=F(x)e^x\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{F(x)}=e^x\mathrm{d}x$$

$$\ln F(x)=e^x+C$$

将  $F(0)=1$  代入，得  $F(x)=\exp(e^x-1)$  于是  $w_n=\frac{x^n}{n!}F(x)$

## 拓展

考虑对结果的解释  $e^x-1=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$  ( $a_n=1$ ) 可以理解为将所有  $n$  个元素化为为一个集合的方案数  $a_n$  的  $\text{EGF}$

$\exp(e^x-1)=\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i(x)}{i!}$  式子中  $\sum_{i=0}^{\infty}$  可以理解为枚举最终划分的集合数  $i$

$A^i(x)$  可以理解为将所有元素划分为  $i$  个非空集合  $i!$  可以理解为划分的集合之间无序所以除以全排列数。

类似的，设  $n$  个点带标号生成树的  $\text{EGF}$  为  $F(x)$  则  $n$  个点带标号生成森林的  $\text{EGF}$  为  $\exp F(x)$

其中  $n$  个点带标号生成树的  $\text{EGF}$  容易求得为  $\sum_{n=0}^{\infty} n^{n-2} \frac{x^n}{n!}$  所以取  $\exp$  即可快速求得  $n$  个点带标号生成森林的  $\text{EGF}$

设  $n$  个点带标号无向连通图的  $\text{EGF}$  为  $F(x)$  则  $n$  个点带标号无向图的  $\text{EGF}$  为  $\exp F(x)$

其中  $n$  个点带标号无向图的  $\text{EGF}$  容易求得为  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\binom{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!}$  所以取  $\ln$  即可快速求得  $n$  个点带标号无向连通图的  $\text{EGF}$

## 例题二

### 题意

定义错排数  $a_n$  等于长度为  $n$  且  $p_i \neq i$  的置换个数，求错排数  $a_n$

### 题解

$p_i \neq i$  等价于不含长度为  $1$  的置换环，考虑所有元素处于同一个置换环时的  $\text{EGF}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)! \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) - x$$

错排等价于将置换划分为若干个长度不为  $1$  的置换环，于是错排数的  $\text{EGF}$  即为  $\exp(-\ln(1-x) - x)$

## 例题三

### 题意

求满足  $\underbrace{\circ \circ \dots \circ}_k = \underbrace{\circ \circ \dots \circ}_{k-1}$  的长度为  $n$  的置换个数。

## 题解

建图，连有向边  $i \rightarrow f(i)$  由于  $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k-1}$  该图显然存在自环，且所有点  $k-1$  步内一定到达自环点。

而该图只有  $n$  条边，于是该图显然只存在一个环，于是只存在一个自环点，设其为根节点，于是忽略自环则该图恰好为一个内向树。

于是问题转化为求  $n$  个点带标号的深度不超过  $k$  (假设根节点深度为  $1$ ) 的生成树的  $\text{EGF}$  设其为  $F_k(x)$

显然这等价于选择一个点作为根节点然后取  $n-1$  个点带标号的深度不超过  $k-1$  的生成森林向其连边。

于是有  $F_k(x) = n \left[ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right] \exp F_{k-1}(x) = \left[ \frac{x^n}{n!} \right] \exp x F_{k-1}(x)$

即  $F_k(x) = \exp x F_{k-1}(x)$  边界条件  $F_1(x) = x$

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:jxm2001:%E7%94%9F%E6%88%90%E5%87%BD%E6%95%B0\\_2&rev=1597304193](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E7%94%9F%E6%88%90%E5%87%BD%E6%95%B0_2&rev=1597304193)

Last update: 2020/08/13 15:36