

重链剖分

算法简介

一种动态维护树上路径、子树信息的算法，单次操作时间复杂度 $O(\log^2 n)$

算法思想

重链剖分的关键是把树上修改问题转化为区间修改问题

为方便理解，先考虑点权树问题

使用dfs序可以把子树查询和修改问题转化区间修改问题，单次操作时间复杂度 $O(\log n)$

因此重链剖分重点在如何解决树上路径修改问题，考虑将树划分成若干条链，分别对每条链进行修改、查询操作，便可实现树上路径修改

为简化问题，先考虑根结点到某结点的路径，我们不希望看见该路径涉及成过多条链的情况，而将树划分成重路径和轻边可以很好地解决这一问题

首先给出重儿子和轻儿子的定义：对于非叶子节点，将所有儿子中以其为根的子树含结点数最多的儿子定义为重儿子，其余为轻儿子

父节点向重儿子连一条重边，每个轻儿子连一条轻边。若干重边组成一条重链

这样，根结点到某结点的路径便被划分成若干条轻边和重链相间的路径，易知每经过一条轻边，子树所含结点数减半，因此一条路径最多经过 $\log n$ 条轻边，因此单次修改或查询根结点到某结点的路径的时间复杂度变为 $O(\log^2 n)$

而对于端点为两个非根结点的路径，可以考虑像倍增法求 LCA 那样不断把两个结点往上提，直到两个结点位于同一条链

代码实现

先一遍dfs处理出每个结点的深度、父结点、重儿子

第二遍dfs确定dfs序和每条链的起点，注意dfs要先重儿子，再轻儿子，确保重链上dfs序连续

路径上查询和修改操作需要每次选择路径两 endpoint 中所在链的顶端结点的深度较大的结点，线段树查询/修改后跳到所在链的顶端结点的父结点

代码模板

[洛谷p3384](#)

模板题

题目大意是说给定一棵 n 个结点的点权树，每次操作为查询路径或子树上的权值和，或者给路径或子树上的每个点权值加 v ，所有结果取模

代码

```
#include <cstdio>
#include <cstdlib>
#include <algorithm>
#include <cctype>
#define _for(i,a,b) for(int i=(a);i<(b);++i)
#define _rep(i,a,b) for(int i=(a);i<=(b);++i)
using namespace std;
typedef long long LL;
inline int read_int(){
    int t=0;bool sign=false;char c=getchar();
    while(!isdigit(c)){sign|=c=='-';c=getchar();}
    while(isdigit(c)){t=(t<<1)+(t<<3)+(c&15);c=getchar();}
    return sign?-t:t;
}
inline LL read_LL(){
    LL t=0;bool sign=false;char c=getchar();
    while(!isdigit(c)){sign|=c=='-';c=getchar();}
    while(isdigit(c)){t=(t<<1)+(t<<3)+(c&15);c=getchar();}
    return sign?-t:t;
}
inline void write(LL x){
    register char c[21],len=0;
    if(!x)return putchar('0'),void();
    if(x<0)x=-x,putchar('-');
    while(x)c[++len]=x%10,x/=10;
    while(len)putchar(c[len--]+48);
}
inline void space(LL x){write(x),putchar(' ');}
inline void enter(LL x){write(x),putchar('\n');}
const int MAXN=1e5+5;
int mod;
struct Tree{
    LL a[MAXN<<2],sum[MAXN<<2],lazy[MAXN<<2];
    int lef[MAXN<<2],rig[MAXN<<2];
    void init(int n,int *w){
        _rep(i,1,n)
            a[i]=w[i];
        build(1,1,n);
    }
    void push_up(int k){
        sum[k]=(sum[k<<1]+sum[k<<1|1])%mod;
    }
    void build(int k,int L,int R){
        lef[k]=L,rig[k]=R;
        int M=L+R>>1;
    }
};
```

```

    if(L==R)
    return sum[k]=a[M],void();
    build(k<<1,L,M);
    build(k<<1|1,M+1,R);
    push_up(k);
}
void push_down(int k){
    if(lazy[k]){
        int lson=k<<1,rson=k<<1|1;
        lazy[lson]=(lazy[lson]+lazy[k])%mod;
        sum[lson]=(sum[lson]+lazy[k]*(rig[lson]-lef[lson]+1))%mod;
        lazy[rson]=(lazy[rson]+lazy[k])%mod;
        sum[rson]=(sum[rson]+lazy[k]*(rig[rson]-lef[rson]+1))%mod;
        lazy[k]=0;
    }
}
LL query(int k,int L,int R){
    if(L<=lef[k]&&rig[k]<=R)
    return sum[k];
    push_down(k);
    int mid=lef[k]+rig[k]>>1;
    if(mid>=R)
    return query(k<<1,L,R);
    else if(mid<L)
    return query(k<<1|1,L,R);
    else
    return (query(k<<1,L,R)+query(k<<1|1,L,R))%mod;
}
void update(int k,int L,int R,LL v){
    if(L<=lef[k]&&rig[k]<=R){
        sum[k]=(sum[k]+(rig[k]-lef[k]+1)*v)%mod;
        lazy[k]=(lazy[k]+v)%mod;
        return;
    }
    push_down(k);
    int mid=lef[k]+rig[k]>>1;
    if(mid>=L)
    update(k<<1,L,R,v);
    if(mid<R)
    update(k<<1|1,L,R,v);
    push_up(k);
}
}tree;
struct Edge{
    int to,next;
}edge[MAXN<<1];
int head[MAXN],m;
void Insert(int u,int v){
    edge[++m].to=v;
    edge[m].next=head[u];
    head[u]=m;
}

```

```
}
int d[MAXN],w[MAXN],sz[MAXN],f[MAXN],dfs_id[MAXN],dfs_t;
int h_son[MAXN],mson[MAXN],p[MAXN],dfs_w[MAXN];
void dfs_1(int u,int fa,int depth){
    sz[u]=1;f[u]=fa;d[u]=depth;mson[u]=0;
    for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
        int v=edge[i].to;
        if(v==fa)
            continue;
        dfs_1(v,u,depth+1);
        sz[u]+=sz[v];
        if(sz[v]>mson[u]){
            h_son[u]=v;
            mson[u]=sz[v];
        }
    }
}
void dfs_2(int u,int top){
    dfs_id[u]=++dfs_t;p[u]=top;dfs_w[dfs_t]=w[u];
    if(mson[u])
        dfs_2(h_son[u],top);
    for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
        int v=edge[i].to;
        if(v==f[u]||v==h_son[u])
            continue;
        dfs_2(v,v);
    }
}
LL query_son(int u){return tree.query(1,dfs_id[u],dfs_id[u]+sz[u]-1);}
void update_son(int u,int w){tree.update(1,dfs_id[u],dfs_id[u]+sz[u]-1,w);}
LL query_path(int u,int v){
    LL ans=0;
    while(p[u]!=p[v]){
        if(d[p[u]]<d[p[v]])
            swap(u,v);
        ans=(ans+tree.query(1,dfs_id[p[u]],dfs_id[u]))%mod;
        u=f[p[u]];
    }
    if(d[u]>d[v])
        swap(u,v);
    ans=(ans+tree.query(1,dfs_id[u],dfs_id[v]))%mod;
    return ans;
}
void update_path(int u,int v,int w){
    while(p[u]!=p[v]){
        if(d[p[u]]<d[p[v]])
            swap(u,v);
        tree.update(1,dfs_id[p[u]],dfs_id[u],w);
        u=f[p[u]];
    }
}
```

```

    if(d[u]>d[v])
        swap(u,v);
    tree.update(1,dfs_id[u],dfs_id[v],w);
}
int main()
{
    int n=read_int(),q=read_int(),root=read_int(),opt,x,y,z;
    mod=read_int();
    _rep(i,1,n)
        w[i]=read_LL()%mod;
    _for(i,1,n){
        x=read_int(),y=read_int();
        Insert(x,y);
        Insert(y,x);
    }
    dfs_1(root,-1,0);
    dfs_2(root,root);
    tree.init(n,dfs_w);
    while(q--){
        opt=read_int();
        if(opt==1){
            x=read_int();y=read_int();z=read_int();
            update_path(x,y,z);
        }
        else if(opt==2){
            x=read_int();y=read_int();
            enter(query_path(x,y));
        }
        else if(opt==3){
            x=read_int();y=read_int();
            update_son(x,y);
        }
        else
            enter(query_son(read_int()));
    }
    return 0;
}

```

算法习题

习题一

洛谷p3038

给出一棵 n 个结点的边权树，初始边权全为 0 ，有 m 个操作，操作为将一条路径上的边权加一或询问某条边的权值

考虑一个点有唯一的父结点，因此可以把该点与父结点的连边的边权作为该点的点权。根结点权值任意，不影响结果

而路径修改/查询注意跳过 LCA 即可

代码

```
#include <cstdio>
#include <cstdlib>
#include <algorithm>
#include <cctype>
#define _for(i,a,b) for(int i=(a);i<(b);++i)
#define _rep(i,a,b) for(int i=(a);i<=(b);++i)
using namespace std;
typedef long long LL;
inline int read_int(){
    int t=0;bool sign=false;char c=getchar();
    while(!isdigit(c)){sign|=c=='-';c=getchar();}
    while(isdigit(c)){t=(t<<1)+(t<<3)+(c&15);c=getchar();}
    return sign?-t:t;
}
inline char get_char(){
    char c=getchar();
    while(c==' '||c=='\n'||c=='\r')c=getchar();
    return c;
}
inline void write(LL x){
    register char c[21],len=0;
    if(!x)return putchar('0'),void();
    if(x<0)x=-x,putchar('-');
    while(x)c[++len]=x%10,x/=10;
    while(len)putchar(c[len--]+48);
}
inline void space(LL x){write(x),putchar(' ');}
inline void enter(LL x){write(x),putchar('\n');}
const int MAXN=1e5+5;
#define lowbit(x) ((x)&(-x))
struct Tree{
    LL c[2][MAXN],n;
    void add(int pos,int v){
        int k=pos;
        while(pos<=n){
            c[0][pos]+=v;
            c[1][pos]+=v*(k-1);
            pos+=lowbit(pos);
        }
    }
    void update(int lef,int rig,int v){
        add(lef,v);
        add(rig+1,-v);
    }
    LL sum(int pos){
        int k=pos;
```

```

    LL ans1=0,ans2=0;
    while(pos){
        ans1+=c[0][pos];
        ans2+=c[1][pos];
        pos-=lowbit(pos);
    }
    return ans1*k-ans2;
}
int query(int lef,int rig){
    return sum(rig)-sum(lef-1);
}
}tree;
struct Edge{
    int to,next;
}edge[MAXN<<1];
int head[MAXN],m;
void Insert(int u,int v){
    edge[++m].to=v;
    edge[m].next=head[u];
    head[u]=m;
}
int d[MAXN],w[MAXN],sz[MAXN],f[MAXN],dfs_id[MAXN],dfs_t;
int h_son[MAXN],mson[MAXN],p[MAXN],dfs_w[MAXN];
void dfs_1(int u,int fa,int depth){
    sz[u]=1;f[u]=fa;d[u]=depth;mson[u]=0;
    for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
        int v=edge[i].to;
        if(v==fa)
            continue;
        dfs_1(v,u,depth+1);
        sz[u]+=sz[v];
        if(sz[v]>mson[u]){
            h_son[u]=v;
            mson[u]=sz[v];
        }
    }
}
void dfs_2(int u,int top){
    dfs_id[u]=++dfs_t;p[u]=top;dfs_w[dfs_t]=w[u];
    if(mson[u])
        dfs_2(h_son[u],top);
    for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
        int v=edge[i].to;
        if(v==f[u]||v==h_son[u])
            continue;
        dfs_2(v,v);
    }
}
//LL query_son(int u){return tree.query(dfs_id[u]+1,dfs_id[u]+sz[u]-1);}
//void update_son(int u,int
w){tree.update(dfs_id[u]+1,dfs_id[u]+sz[u]-1,w);}

```

```
LL query_path(int u,int v){
    LL ans=0;
    while(p[u]!=p[v]){
        if(d[p[u]]<d[p[v]])
            swap(u,v);
        ans+=tree.query(dfs_id[p[u]],dfs_id[u]);
        u=f[p[u]];
    }
    if(d[u]>d[v])
        swap(u,v);
    ans+=tree.query(dfs_id[u]+1,dfs_id[v]);
    return ans;
}

void update_path(int u,int v,int w){
    while(p[u]!=p[v]){
        if(d[p[u]]<d[p[v]])
            swap(u,v);
        tree.update(dfs_id[p[u]],dfs_id[u],w);
        u=f[p[u]];
    }
    if(d[u]>d[v])
        swap(u,v);
    tree.update(dfs_id[u]+1,dfs_id[v],w);
}

int main()
{
    int n=read_int(),q=read_int(),root=1,x,y;
    char opt;
    tree.n=n;
    _for(i,1,n){
        x=read_int(),y=read_int();
        Insert(x,y);
        Insert(y,x);
    }
    dfs_1(root,-1,0);
    dfs_2(root,root);
    while(q--){
        opt=get_char();
        x=read_int(),y=read_int();
        if(opt=='P')
            update_path(x,y,1);
        else
            enter(query_path(x,y));
    }
    return 0;
}
```

习题二

洛谷p2486

给定一棵个 n 节点的点权树，共有 m 个操作，操作分为两种：

1. 将 a 节点到节点 b 的路径上的所有点(包括 a 和 b)都染成颜色 c
2. 询问节点 a 到节点 b 的路径上的颜色段数量(颜色段的定义是极长的连续相同颜色被认为是一段)

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:%E9%87%8D%E9%93%BE%E5%89%96%E5%88%86&rev=1589462844

Last update: 2020/05/14 21:27