Atcoder Rugular Contest 106

比赛链接

E - Medals

题意

给定 n 个员工，每个员工第 $[2k*a_i+1,(2k+1)*a_i]$ 天上班，第 $[(2k+1)*a_i+1,(2k+2)*a_i]$ 天休息。

每天最多可以给一名当天上班的员工一个奖章，问最少需要多少天才能使每个员工至少有 k 个奖章。

题解

建立二分图，左部 $n*k$ 个点代表每个员工的每个奖章，右部为天数，然后每个员工的奖章向该员工对应的上班时间连边。

于是问题转化为二分图匹配问题，考虑二分天数，然后检查左部是否存在完全匹配。

接下来给出二分图完全匹配的 Hall 定理：

设左部集合为 U，$T(S)$ 表示右部中所有与 S 有连边的点构成的集合。则左部可以完全匹配等价于对于任意非空集合 $S\subset U$，有 $|S|\le |T(S)|$。

回到原题，发现 $T(S)$ 的大小至于 S 中包含的员工的种类数有关，与每种员工有多少个奖章无关。

于是不妨只考虑每个员工的奖章要么不选，要么全选的情况，因为这样可以保证 $T(S)$ 不变时 $|S|$ 最大。

发现 $T(S)$ 难以直接求解，考虑求 $T(S)$ 的补集，这等价于总天数 $-$ 仅含 $U-S$ 的子集(包括空集，即无人上班)的员工上班的天数。

先求出每天代表的上班员工的集合，然后用桶维护每个员工集合的上班天数，最后维护一下子集和即可，子集和的维护具体见代码。

最后，关于二分的上下界，首先不难发现下界为 nk，另外对于 $2nk$ 天每个员工至少上班 nk 天，于是 $|T(S)|\ge |S|$，所以 $2nk$ 为上界。

总时间复杂度 $O((n2^n+nk)\log nk)$。

```
const int MAXN=20,MAXS=1<<MAXN,MAXC=2e5*MAXN;
int a[MAXN],c[MAXS],minc[MAXS],d[MAXC];
int main()
{
    int n=read_int(),k=read_int(),U=(1<<n)-1;
    _for(i,0,n)a[i]=read_int();
```

```
    _for(i,0,MAXC){
        _for(j,0,n){
            if((i/a[j])%2==0)
            d[i]|=1<<j;
        }
    }
    _rep(i,1,U)minc[i]=minc[i&(i-1)]+k;
    int lef=n*k,rig=2*n*k,ans;
    while(lef<=rig){
        int mid=lef+rig>>1;
        mem(c,0);
        _for(i,0,mid)c[d[i]]++;
        _for(i,0,n){
            _for(j,0,1<<n){
                if(j&(1<<i))
                c[j]+=c[j^(1<<i)];
            }
        }
        bool flag=true;
        _rep(i,1,U){
            if(minc[i]>mid-c[U^i]){
                flag=false;
                break;
            }
        }
        if(flag){
            ans=mid;
            rig=mid-1;
        }
        else
        lef=mid+1;
    }
    enter(ans);
    return 0;
}
```

F - Figures

题意

给定 n 个带标号点，每个点有 a_i 个不同的接口，每个接口最多有一个度，问生成树的个数。

题解

设每个点度数为 d_i，于是在每个生成树中每个点的贡献为 $a_i^{\underline{d_i}}$，根据 prufer 序列性质，答案为

$$ \sum_{\sum d_i=2n-2}\binom{n-2}{d_1-1,d_2-1\cdots d_n-1}\prod_{i=1}^n a_i^{\underline{d_i}}= \sum_{\sum d_i=2n-2}\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots (d_n-1)!}\prod_{i=1}^n a_i^{\underline{d_i}} $$

发现这东西可以用指数型生成函数搞，为方便处理，令 $c_i=d_i+1$□于是上式化为

$$ \sum_{\sum c_i=n-2}\binom{n-2}{c_1,c_2\cdots c_n}\prod_{i=1}^n a_i^{\underline{c_i+1}} $$

考虑 $a_i=k$ 的点对应的生成函数，枚举 $c\in [0,k-1]$□贡献为 $k^{\underline{c+1}}$□于是有

$$ \begin{equation}\begin{split} f_k(x)&=\sum_{i=0}^{k-1}\cfrac {k^{\underline{i+1}}}{i!}x^i \\ &=\sum_{i=0}^{k-1}\cfrac {k!}{i!(k-1-i)!}x^i\\ & =k(x+1)^{k-1} \end{split}\end{equation} $$ 答案为 $$ \begin{equation}\begin{split} [x^{n-2}](n-2)!\prod_{i=1}^n f_{a_i}(x) &=(n-2)!\prod_{i=1}^n a_i[x^{n-2}](x+1)^{\sum(a_i-1)} \\ &=(n-2)!\prod_{i=1}^n a_i{\sum_{i=1}^na_i-n\choose n-2}\\ & =\prod_{i=1}^n a_i\left(\sum_{i=1}^na_i-n\right)^{\underline{n-2}} \end{split}\end{equation} $$