Atcoder Rugular Contest 113

比赛链接

F - Social Distance

题意

给定初始序列 $(1,2\cdots n)$□每次操作可以任选一个数将其移动到序列最左边或最右边。

问恰好 m 次操作将序列变成 $(a_1,a_2\cdots a_n)$ 的方案数。

题解

首先最后一次操作一定是将 a_1 移动到最左边，或者将 a_n 移动到最右边。

假设最后先进行 $c_1(c_1\ge 0)$ 次操作都是对 a_n 的操作然后再将 a_n 移到最右边，于是这 c_1 次操作有 2^{c_1} 种方案。

于是问题转化为求 $(1,2\cdots n)$ 删去 a_n 后恰好在 $m-c_1-1$ 次操作将序列变成 $(a_1,a_2\cdots a_{n-1})$ 的方案数。

假设问题转化后最后先进行 $c_2(c_2\ge 0)$ 次操作都是对 a_{n-1} 或 a_{n} 的操作然后再将 a_{n-1} 移到最右边，于是这 c_2 次操作有 4^{c_2} 种方案。

更加形式的，假设所有操作删去的数为 $a_1,a_2\cdots a_l$ 以及 $a_{n-r+1},a_{n-r+2}\cdots a_n$□且假设删去的顺序固定，于是方案数为 $\prod_{i=1}^{l+r}(2i)^{c_i}$□

同时 $\sum_{i=1}^{l+r} c_i=m-l-r$□由于删去的顺序其实是不固定的，于是最终算贡献时需要乘上 ${l+r\choose l}$□

关于方案的合法性□$(1,2\cdots n)$ 删去 $a_1,a_2\cdots a_l$ 以及 $a_{n-r+1},a_{n-r+2}\cdots a_n$ 的数都未经操作。

于是剩下的排列就是 $(a_{l+1},a_{l+2}\cdots a_{n-r})$□所以只要 $a_{l+1},a_{l+2}\cdots a_{n-r}$ 单增即可计入贡献。