

Atcoder Regular Contest 113

[比赛链接](#)

F - Social Distance

题意

给定初始序列 $(1, 2, \dots, n)$ 每次操作可以任选一个数将其移动到序列最左边或最右边。

问恰好 m 次操作将序列变成 (a_1, a_2, \dots, a_n) 的方案数。

题解

首先最后一次操作一定是将 a_1 移动到最左边，或者将 a_n 移动到最右边。

假设最后先进行 $c_1 (c_1 \geq 0)$ 次操作都是对 a_n 的操作然后再将 a_n 移到最右边，于是这 c_1 次操作有 2^{c_1} 种方案。

于是问题转化为求 $(1, 2, \dots, n)$ 删去 a_n 后恰好在 $m - c_1 - 1$ 次操作将序列变成 $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ 的方案数。

假设问题转化后最后先进行 $c_2 (c_2 \geq 0)$ 次操作都是对 a_{n-1} 或 a_n 的操作然后再将 a_{n-1} 移到最右边，于是这 c_2 次操作有 4^{c_2} 种方案。

更加形式的，假设所有操作删去的数为 a_1, a_2, \dots, a_l 以及 $a_{n-r+1}, a_{n-r+2}, \dots, a_n$ 且假设删去的顺序固定，于是方案数为 $\prod_{i=1}^{l+r} (2i)^{c_i}$

同时 $\sum_{i=1}^{l+r} c_i = m - l - r$ 由于删去的顺序其实是不固定的，于是最终算贡献时需要乘上 $\binom{l+r}{l}$

关于方案的合法性 $(1, 2, \dots, n)$ 删去 a_1, a_2, \dots, a_l 以及 $a_{n-r+1}, a_{n-r+2}, \dots, a_n$ 的数都未经操作。

于是剩下的排列就是 $(a_{l+1}, a_{l+2}, \dots, a_{n-r})$ 所以只要 $a_{l+1}, a_{l+2}, \dots, a_{n-r}$ 单增即可计入贡献。

最后问题就剩下计算每个 $\prod_{i=1}^{l+r} (2i)^{c_i}$ 了，设 $\text{dp}(i, j) = \prod_{k=1}^i (2k)^{c_k} \left(\sum_{k=1}^i c_k = j \right)$ 考虑枚举 c_i 于是有状态转移：

$$\text{dp}(i, j) = \sum_{k=0}^j (2i)^{j-k} \text{dp}(i-1, k)$$

记录一下前缀和，即可 $O(nm)$ 完成 dp 最后 $O(n^2)$ 枚举 l, r 统计贡献即可。

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:contest:arc_112&rev=1614478605

Last update: **2021/02/28 10:16**

